A számítástudomány alapjai

Dr. Ésik Zoltán
SZTE, Számítástudomány Alapjai Tanszék

Bevezetés

Kiszámíthatóság elmélet 1930-as évek közepétől

Mely feladatok oldhatók meg algoritmikusan (=számítógéppel)?

Bonyolultságelmélet 1970-es évek elejétől

Mely feladatokat lehet hatékonyan megoldani számítógéppel?

Hogyan lehet a számítógéppel megoldható feladatokat osztályozni a megoldásukhoz szükséges erőforrások mennyisége szerint?

Automaták és formális nyelvek elmélete 1950-es évek közepétől

Alapul szolgál a fenti két területhez de számos egyéb alkalmazási területe is van:

fordítóprogramok, szerkesztők, logika és programozási logikák, szekvenciális áramkörök, idegi folyamatok modellezése, mesterséges intelligencia,...

Bevezetés

Automaták és formális nyelvek

Véges automaták és reguláris nyelvek

Veremautomaták és környezetfüggetlen nyelvek

Chomsky-féle hierarchia

Kiszámíthatóság elmélet

Turing-gépek és a Church–Turing tézis

Eldönthető nyelvek és rekurzívan felsorolható nyelvek

A megállási probléma eldönthetetlensége

Egyéb algoritmikusan megoldhatatlan problémák

Bonyolultságelmélet

Bonyolultsági osztályok

A **P** és **NP** osztályok

Visszavezetés és **NP**-teljes problémák

PSPACE, L, NL

Szavak és nyelvek

Definíció (Szavak) Legyen Σ véges nemüres halmaz. Σ-feletti szón a Σ elemeiből (betűiből) képzett véges sorozatot értünk:

$$w = w_1 \dots w_n, \quad w_i \in \Sigma, \quad i = 1, \dots, n$$

Az n nemnegatív egész számot a w szó hosszának nevezzük. Jelölés: $|w|$. A 0 hosszúságú szót az üres szónak nevezzük, jelölése ε.

Példa
$$\begin{array}{lcllcl} \Sigma & = & \{0,1\} & & & \\ w & = & 01001 & |w| & = & 5 \\ w' & = & 000 = 0^3 & |w'| & = & 3 \end{array}$$

Jelölés Σ^* jelöli a Σ feletti szavak halmazát.

Szavak és nyelvek

Definíció (Nyelv) Σ-feletti nyelven a Σ^* egy részhalmazát értjük.

Példa $\Sigma = \{0,1\}$

Véges nyelvek:

$$\{0, 01, 001\}, \quad \{\varepsilon\}, \quad \{\varepsilon, 10\}, \quad \varnothing$$

Végtelen nyelvek:

$$\Sigma^*, \quad \{0^n 1^m : n, m \geq 0\}, \quad \{0^n 1^n : n \geq 0\}]$$

$$\{w \in \Sigma^* : |w|_0 = |w|_1\}, \quad \{0^n 1^m 0^{n+m} : n, m \geq 0\},$$

$$\{0^p : p \text{ prímszám}\}$$

Itt $|w|_0$ a w-ben előforduló 0-ák száma.

Véges automaták

Definíció (Véges automata)

$$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Q : állapotok véges, nemüres halmaza

Σ : bemenő jelek (betűk) véges, nemüres halmaza

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$: átmeneti függvény

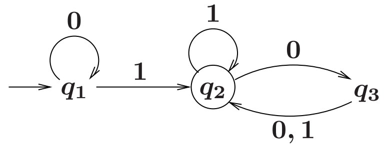
$q_0 \in Q$: kezdőállapot

$F \subseteq Q$: végállapotok halmaza

Véges automaták

Véges automaták ábrázolása irányított, címkézett gráffal (átmeneti diagram)

M_1 :



$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

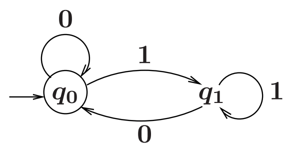
δ :

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

Kezdőállapot: q_1

$F = \{q_2\}$

Véges automaták

M_2 : 

$$Q = \{q_0, q_1\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

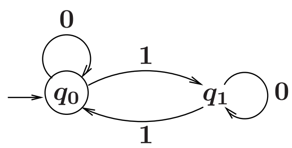
δ :

	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_1

Kezdőállapot: q_0

Végállapothalmaz: $F = \{q_0\}$

Véges automaták

M_3 : 

$$Q = \{q_0, q_1\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

δ :

	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0

Kezdőállapot: q_0

$$F = \{q_0\}$$

Véges automaták

Általánosítás

Legyen $n \geq 1$.

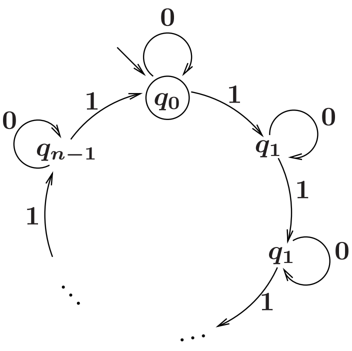
$Q = \{q_0, \ldots, q_{n-1}\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\delta(q_i, j) = q_{i+j \bmod n}$

Kezdőállapot: q_0

$F = \{q_0\}$



Véges automaták

Definíció (számítási sorozat) Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges automata, $q \in Q$, $w = w_1 \ldots w_n \in \Sigma^*$ $(w_i \in \Sigma, i = 1, \ldots, n)$. Azt mondjuk, hogy egy

$$r_0, r_1, \ldots, r_n$$

állapotsorozat az M q-ból induló számítási sorozata a w szón, ha

1. $r_0 = q$
2. $r_i = \delta(r_{i-1}, w_i) \quad i = 1, \ldots, n$

Sikeres az $r_0, r_1, \ldots, r_n$ számítási sorozat, ha $r_n \in F$. Azt mondjuk, hogy M elfogadja a w szót, ha létezik a q_0 kezdőállapotból induló sikeres számítási sorozata a w szón. Végül az M által felismert nyelv: $L(M) = \{w \in \Sigma^* : M \text{ elfogadja } w\text{-t}\}$.

Felismerhető nyelvek

Definíció Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet felismerhetőnek nevezünk, ha létezik olyan M véges automata, mely L-et felismeri: $L = L(M)$.

Példa $\Sigma = \{0, 1\}$

- $\{w \in \Sigma^* : w \text{ utolsó betűje } 1\} = \{u1 : u \in \Sigma^*\}$
- $\{w \in \Sigma^* : |w|_1 \equiv 0 \ mod\ 2\}$
- $\{w \in \Sigma^* : 00 \text{ és } 11 \text{ nem fordulnak elő rész-szóként } w\text{-ben}\}$

felismerhető nyelvek.

Példa $\{0^n 1^n : n \geq 0\}$ nem felismerhető

Σ^* mint monoid

Σ^* mint monoid:

$$u, v \in \Sigma^*, \quad u = u_1 \dots u_n, v = v_1 \dots v_m \quad \text{konkatenáció}$$
$$u \cdot v = u_1 \dots u_n v_1 \dots v_m \quad \text{művelete}$$

Tulajdonságok:

$$\begin{aligned} (u \cdot v) \cdot w &= u \cdot (v \cdot w) && \text{(asszociativitás)} \\ u \cdot \varepsilon &= u && (\varepsilon \text{ egységelem}) \\ \varepsilon \cdot u &= u \end{aligned}$$

Az $u \cdot v$ helyett általában uv-t írunk.

Műveletek nyelveken

Legyenek $L_1, L_2 \in \Sigma^*$.

$$\left.\begin{array}{rcl} L_1 \cup L_2 & = & \{w \in \Sigma^* : w \in L_1 \text{ vagy } w \in L_2\} \\ L_1 \cap L_2 & = & \{w \in \Sigma^* : w \in L_1 \text{ és } w \in L_2\} \\ \overline{L_1} & = & \{w \in \Sigma^* : w \notin L_1\} \end{array}\right\} \text{halmazelméleti vagy Boole-féle műveletek}$$

$$\begin{array}{rcll} L_1 \cdot L_2 & = & \{uv : u \in L_1, v \in L_2\} & \text{konkatenáció} \\ L_1^* & = & \{u_1 \ldots u_n : n \geq 0, u_1, \ldots, u_n \in L_1\} & \text{(Kleene) iteráció} \end{array}$$

$L_1 \cdot L_2$ helyett általában $L_1 L_2$-t írunk.

Reguláris műveletek:
egyesítés, konkatenáció, iteráció

Műveletek nyelveken

Példa

- $\{01, 10\} \cdot \{00, 11\} = \{0100, 0111, 1000, 1011\}$
- $\{01\}^* = \{(01)^n : n \geq 0\} = \{w : 00$ és 11 nem rész-szavak,
  ha $w \neq \varepsilon$ akkor első betűje 0
  utolsó betűje $1\}$
- $\{1, \varepsilon\}\{01\}^*\{0, \varepsilon\} = \{w : 00$ és 11 nem rész-szavak$\}$

Megjegyzés

- Σ felfogható a Σ^* részhalmazaként, így alkalmazható rá az iteráció művelete, melynek eredménye a Σ-feletti összes szavak halmaza.
- $\varnothing^* = \{\varepsilon\}$

Műveletek nyelveken

Néhány azonosság:

$$L_1 \cup (L_2 \cup L_3) = (L_1 \cup L_2) \cup L_3 \qquad L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3) = (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3$$
$$L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1 \qquad L \cdot \{\varepsilon\} = L$$
$$L \cup L = L \qquad \{\varepsilon\} \cdot L = L$$
$$L \cup \emptyset = L \qquad L \cdot \emptyset = \emptyset$$
$$\emptyset \cdot L = \emptyset$$

$$\begin{aligned} L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) &= (L_1 \cdot L_2) \cup (L_1 \cdot L_3) \\ (L_1 \cup L_2) \cdot L_3 &= (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3) \end{aligned}$$

Műveletek nyelveken

$$\begin{aligned} (L_1 \cup L_2)^* &= (L_1^* \cdot L_2)^* L_1^* \\ (L_1 \cdot L_2)^* &= \{\varepsilon\} \cup L_1(L_2 \cdot L_1)^* L_2 \\ L^* &= (L^n)^*(\{\varepsilon\} \cup L \cup \ldots \cup L^{n-1}) \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

Rövidítés:

$$\begin{aligned} L^+ &= L \cdot L^* = L^* \cdot L \\ L^n &= L \cdot \ldots \cdot L \quad (n\text{-szer}), \quad L^0 = \{\varepsilon\} \end{aligned}$$

Állítás

$$\begin{aligned} L^* &= \cup_{n \geq 0} L^n \\ L^+ &= \cup_{n \geq 1} L^n \end{aligned} \qquad \text{tehát } L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$$

Reguláris nyelvek

Definíció Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet regulárisnak nevezünk, ha előáll az

$$\varnothing, \quad \{a\} \quad (a \in \Sigma)$$

nyelvekből a három reguláris művelet véges sokszori alkalmazásával.

Tétel (Kleene) Egy nyelv akkor és csak akkor felismerhető, ha reguláris.

Felismerhető nyelvek zártsági tulajdonságai I

Állítás A felismerhető nyelvek zártak a hamazelméleti műveletekre:

L felismerhető $\Rightarrow \overline{L}$ felismerhető

L_1, L_2 felismerhetőek $\Rightarrow L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2$ felismerhetőek.

Bizonyítás

Komplementerképzés:

$L = L(M), M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Legyen $\overline{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \overline{F})$, $\quad \overline{F} = Q - F$.

Ekkor

$$L(\overline{M}) = \overline{L}.$$

Felismerhető nyelvek zártsági tulajdonságai I

Egyesítés és metszetképzés:

$$L_i = L(M_i), \quad M_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i), \quad i = 1, 2$$

Legyen $Q = Q_1 \times Q_2$

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q, \quad \delta((s_1, s_2), a) = (\delta_1(s_1, a), \delta_2(s_2, a))$$

$$s_1 \in Q_1,\ s_2 \in Q_2,\ a \in \Sigma$$

$$q_0 = (q_1, q_2)$$

$$F_\cup = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$$

$$F_\cap = F_1 \times F_2$$

$$M_\cup = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F_\cup) \qquad M_\cap = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F_\cap)$$

Ekkor:

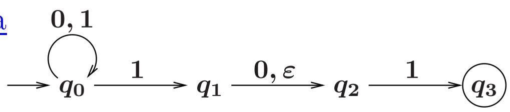
$$L(M_\cup) = L_1 \cup L_2 \qquad L(M_\cap) = L_1 \cap L_2$$

Véges nemdeterminisztikus automata

Véges nemdeterminisztikus automata:

- adott állapotból adott jel hatására több (esetleg 0) állapotba is átmehet,
- üres szó hatására is állapotot válthat.

Példa



$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

kezdőállapot: q_0

végállapotok: q_3

δ	0	1	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\varnothing$
q_1	$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\{q_3\}$	$\varnothing$
q_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Véges nemdeterminisztikus automata

Definíció Véges nemdeterminisztikus (üres átmenetekkel ellátott) automata:

$$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

rendszer, ahol Q, Σ, q_0, F ugyanazok, mint véges automatában, továbbá

$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to P(Q)$$

leképezés, ahol

$$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$$
$$P(Q) = \{Q' : Q' \subseteq Q\} \quad (Q \text{ hatványhalmaza})$$

Véges nemdeterminisztikus automata

Definíció (számítási sorozat) Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges nemdeterminisztikus automata, $w \in \Sigma^*, q \in Q$. Azt mondjuk, hogy egy

$$r_0, r_1, \ldots, r_n \quad (n \geq 0)$$

állapotsorozat az M q-ból induló számítási sorozata a w szón, ha w felírható

$$w = w_1 \ldots w_n, \quad w_i \in \Sigma_\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n$$

alakban úgy, hogy

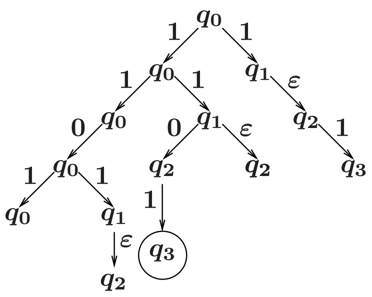
$$r_0 = q \text{ és } r_i \in \delta(r_{i-1}, w_i) \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sikeres az $r_0, r_1, \ldots, r_n$ számítási sorozat, ha $r_n \in F$. Továbbá M elfogadja a w szót, ha létezik a q_0 kezdőállapotból induló sikeres számítási sorozata a w szón. Végül az M által felismert nyelv: $L(M) = \{w \in \Sigma^* : M \text{ elfogadja } w\text{-t}\}$

Véges nemdeterminisztikus automata

Példa (A korábban definiált automatára)

Felismert nyelv: $\{u \in \{0,1\}^* : u$ 101-re vagy 11-re végződik$\}$



Számítási sorozatok a $w = 1101$ szón:

q_0, q_0, q_0, q_0, q_0

q_0, q_0, q_0, q_0, q_1

$q_0, q_0, q_0, q_0, q_1, q_2$

q_0, q_0, q_1, q_2, q_3

Véges nemdeterminisztikus automata

Tétel Minden véges nemdeterminisztikus automatával felismerhető nyelv felismerhető véges automatával

Bizonyítás $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges nemdeterminisztikus automata.

$X \subseteq Q$: $\widehat{X} = \{s : \exists q \in X$ melyre létezik olyan q-ból induló számítási sorozat az ε szóra, mely s-ben végződik$\}$

$$= \{s : \exists r_0, r_1, \ldots, r_n, n \geq 0, r_0 \in X, r_i \in \delta(r_{i-1}, \varepsilon), i = 1, \ldots, n, r_n = s\}$$

$\widehat{X}$ az X ε-lezártja.

Véges nemdeterminisztikus automata

$M' = P(M) = (P(Q), \Sigma, \delta', Q_0, \mathcal{F})$

$$\delta' : P(Q) \times \Sigma \to P(Q) \qquad \delta'(X, a) = \widehat{Y}, Y = \cup_{q \in X} \delta(q, a)$$

$$Q_0 = \widehat{\{q_0\}}$$

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq Q : \quad X \cap F \neq \varnothing\}$$

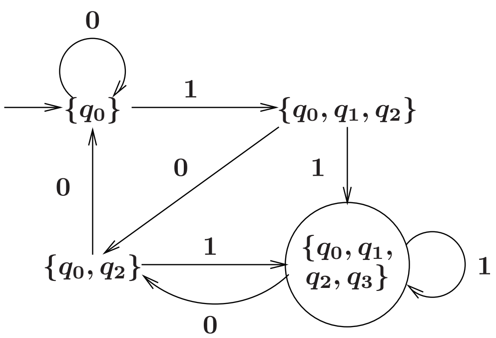
Ekkor

$$L(M') = L(M).$$

$|P(Q)| = 2^{|Q|}$. Elegendő azonban M' „összefüggő részét” venni.

Véges nemdeterminisztikus automata

Példa (A korábbi véges nemdeterminisztikus automata determinizálása)

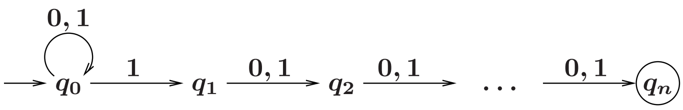


Véges nemdeterminisztikus automata

Állítás Adott $n \geq 1$ esetén legyen $L_n = \{0,1\}^* \cdot \{1\} \cdot \{0,1\}^{n-1} = \{w \in \{0,1\}^* : |w| \geq n$ és w hátulról n-ik jele $1\}$.

Ekkor L_n felismerhető $n+1$ állapotú nemdeterminisztikus automatával, de minden L_n-et felismerő (determinisztikus) automatának legalább 2^n állapota van.

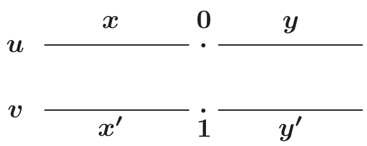
Bizonyítás



felismeri L_n-et.

Véges nemdeterminisztikus automata

Tegyük fel, hogy $M = (Q, \{0,1\}, \delta, q_0, F)$ véges (determinisztikus) automata mely felismeri L_n-et. Minden $u \in \{0,1\}$ szóra jelölje q_0u azt az állapotot, melyre a q_0-ból induló számítási sorozat végződik az u szón.
Ha $u \neq v$ n-hosszú szavak $\{0,1\}^*$-ban, akkor $q_0u \neq q_0v$.



$$|y| = |y'| = n - i - 1$$

Ha $q_0u = q_0v$, akkor $q_0u0^i = q_0v0^i$, így
$u0^i \in L_n \Leftrightarrow v0^i \in L_n$, ellentmondás.

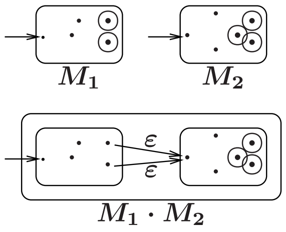
$\Rightarrow |Q| \geq 2^n$.

Felismerhető nyelvek zártsági tulajdonságai II

Állítás A felismerhető nyelvek osztálya zárt a konkatenációra:

$$L_1, L_2 \text{ felismerhetők } \Rightarrow L_1 \cdot L_2 \text{ felismerhető}$$

Bizonyítás



$$M_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i) \quad i = 1, 2$$

$$Q_1 \cap Q_2 = \varnothing \quad L(M_i) = L_i$$

$$M_1 \cdot M_2 = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$$

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 - F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1, a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & q \in F_1, a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \end{cases}$$

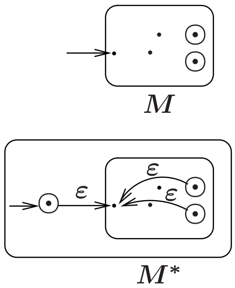
$$L(M_1 \cdot M_2) = L_1 \cdot L_2$$

Felismerhető nyelvek zártsági tulajdonságai II

Állítás A felismerhető nyelvek osztálya zárt a Kleene-féle iterációra:

$$L \text{ felismerhető } \Rightarrow L^* \text{ felismerhető}$$

Bizonyítás



$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad L(M) = L$$

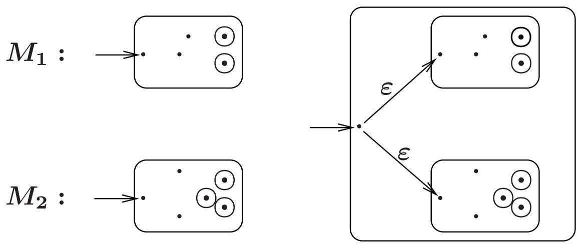
$$M^* = (Q \cup \{s_0\}, \Sigma, \delta_*, s_0, F \cup \{s_0\})$$

$$\delta_*(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & q \in Q \text{ és } q \notin F \\ \delta(q,a) & q \in F \text{ és } a \neq \varepsilon \\ \delta(q,a) \cup \{q_0\} & q \in F \text{ és } a = \varepsilon \\ \{q_0\} & q = s_0 \text{ és } a = \varepsilon \\ \varnothing & q = s_0 \text{ és } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

$$L(M^*) = L^*$$

Felismerhető nyelvek zártsági tulajdonságai II

Megjegyzés Nemdeterminisztikus automatákat felhasználva új, egyszerűbb bizonyítás adható arra, hogy a felismerhető nyelvek zártak az egyesítésre.



$$L(M_1 \cup M_2) = L(M_1) \cup L(M_2)$$

Reguláris kifejezések

Definíció Legyen Σ véges, nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy R reguláris kifejezés (Σ felett), ha:

1. $R = a$ valamely $a \in \Sigma$-ra, és ekkor R az $\{a\}$ nyelvet jelöli, vagy
2. $R = \varnothing$ és ekkor R az $\varnothing$ nyelvet jelöli, vagy
3. $R = (R_1 + R_2)$ és ekkor R az R_1 és R_2 által jelölt nyelvek egyesítését jelöli, vagy
4. $R = (R_1 \cdot R_2)$ és ekkor R az R_1 és R_2 által jelölt nyelvek konkatenációját jelöli, vagy
5. $R = (R_1^*)$ és ekkor R az R_1 által jelölt nyelv iterációját jelöli,

ahol R_1, R_2 reguláris kifejezések.

Reguláris kifejezések

Megjegyzés A felesleges zárójeleket elhagyjuk és megegyezünk abban, hogy * erősebben köt, mint $\cdot$, ami erősebben köt, mint $+$. A $\cdot$ jelet általában elhagyjuk. Rövidítés: $\varnothing^*$ helyett $\boldsymbol{\varepsilon}$-t írunk.

Példa

• $\mathbf{0(01+10)1}+\varepsilon$	$\{\varepsilon, \mathbf{0011}, \mathbf{0101}\}$
• $\mathbf{0(0+1)^*1}$	$\{\boldsymbol{w}:\ \boldsymbol{w}$ **0**-val kezdődik, **1**-el végződik$\}$
• $(\mathbf{0}+\varepsilon)(\mathbf{10})^*(\mathbf{1}+\varepsilon)$	$\{\boldsymbol{w}:\ \mathbf{00}$ és $\mathbf{11}$ nem rész-szavak$\}$
• $(\mathbf{0^2})^*$	$\{\boldsymbol{w}:\ \boldsymbol{w}$ páros hosszú és csak **0**-t tartalmaz$\}$
• $(\mathbf{0^*10^*1})^*\mathbf{0}^*$	$\{\boldsymbol{w}:\ \boldsymbol{w}$ páros sok **1**-est tartalmaz$\}$

Állítás Egy $\boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^*$ nyelv akkor és csakis akkor reguláris, ha jelölhető reguláris kifejezéssel: $\boldsymbol{L} = |\boldsymbol{R}|$ valamely $\boldsymbol{R}$ reguláris kifejezésre.

Kleene tétele

Állítás Minden reguláris nyelv felismerhető

Bizonyítás Legyen $\boldsymbol{R}$ egy $\boldsymbol{\Sigma}$ feletti reguláris kifejezés. Az $\boldsymbol{R}$ felépítése szerinti indukcióval igazoljuk, hogy $|\boldsymbol{R}| \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^*$ felismerhető.

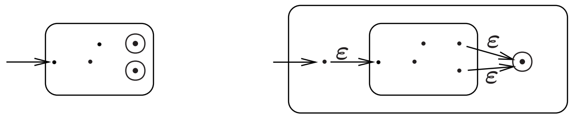
• $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\Sigma}$	$\rightarrow \cdot \xrightarrow{\boldsymbol{a}} \odot$
• $\boldsymbol{R} = \varnothing$	$\rightarrow \cdot$
• $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2})$	Ekkor $\vert\boldsymbol{R}\vert = \vert\boldsymbol{R_1}\vert \cup \vert\boldsymbol{R_2}\vert$ és az állítás következik az indukciós feltevésből és abból, hogy a felismerhető nyelvek zártak az egyesítésre.
• $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R_1} \cdot \boldsymbol{R_2})$	Indukciós feltevés + konkatenációra való zártság.
• $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R_1^*})$	Indukciós feltevés + iterációra való zártság.

Kleene tétele

Lemma Minden felismerhető nyelv felismerhető olyan véges nemdeterminisztikus automatával, melynek pontosan egy végállapota van, a végállapotból nem indul átmenet, a kezdőállapotba nem vezet átmenet, továbbá a kezdőállapot különbözik a végállapottól:

$$\begin{aligned} &M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\}) \\ &\quad \delta(q_f, a) = \varnothing \quad a \in \Sigma_\varepsilon \\ &\quad q_0 \notin \delta(q, a) \quad q \in Q, a \in \Sigma_\varepsilon \end{aligned}$$

Bizonyítás



Kleene tétele

A továbbiakban olyan véges irányított gráfokat fogunk tekinteni, melyeknek:

1. Ki van jelölve egy q_0 „bemenő” csúcsa.
2. Ki van jelölve egy q_f „kimenő” csúcsa, $q_0 \neq q_f$.
3. q_0-ba nem vezet él és q_f-ből nem indul él,
4. ettől eltekintve bármely két q_1, q_2 csúcsra pontosan egy q_1-ből q_2-be vezető él van.
5. Minden él egy reguláris kifejezéssel van címkézve.

A példákban nem tüntetjük fel az $\varnothing$-zal címkézett éleket. A q_0-tól és q_f-től különböző csúcsokat belső csúcsoknak nevezzük.

Kleene tétele

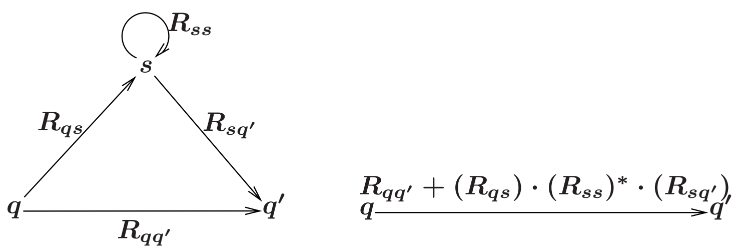
Állítás Minden felismerhető nyelv reguláris.

Bizonyítás Legyen $L = L(M)$, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\})$ mint az előző lemmában.

- M-et felfoghatjuk úgy, mint címkézett irányított gráfot. Adott q, q'-re $(q \neq q_f, q' \neq q_0)$ a $q \longrightarrow q'$ él címkéje:
$$\Sigma(a : \quad q' \in \delta(q, a))$$
- Ha a gráfnak nincs belső csúcsa, a $q_0 \longrightarrow q_f$ él címkéje olyan reguláris kifejezés, mely az L-et jelöli.

Kleene tétele

- Redukciós lépés. Ha a belső csúcsok száma pozitív, akkor 1-gyel csökkentjük ezek számát mindaddig, amíg van belső csúcs. Legyen s belső csúcs.



Tehát: elhagyjuk az s csúcsot, és minden q, q'-re $(q \neq q_f, q' \neq q_0)$ a $q \longrightarrow q'$ címkéjét

$$R_{qq'}\text{-ről} \quad R_{qq'} + (R_{qs}) \cdot (R_{ss})^* \cdot (R_{sq'})\text{-re}$$

változtatjuk.

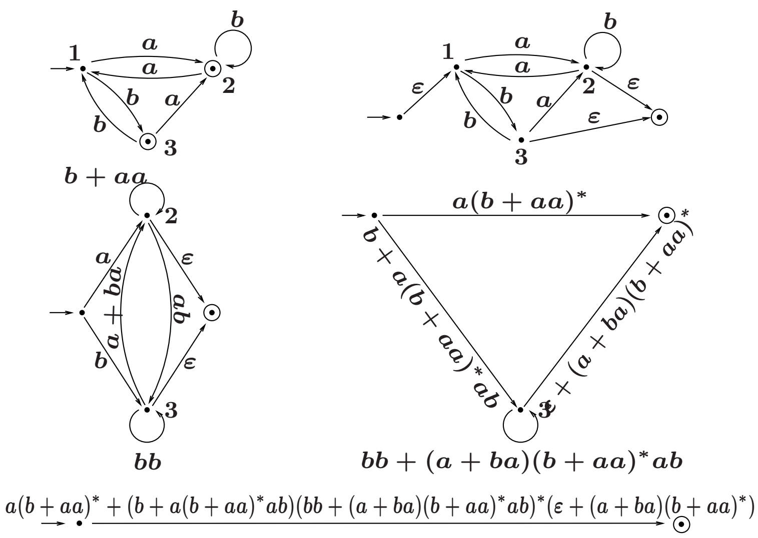
Kleene tétele

Indukcióval bizonyítható: Minden lépésben egy $q \to q'$ él címkéje azt a nyelvet jelöli, mely az összes olyan szóból áll, amely mentén q-ból el lehet q'-be jutni úgy, hogy minden közbülső állapot már korábban elhagyott.

Megjegyzés Az eljárás gyorsítható azzal, hogy kezdetben elhagyjuk az összes olyan csúcsot,

1. amely nem érhető el q_0-ból, vagy
2. amelyből nem érhető el q_f.

Kleene tétele



Reguláris nyelvek pumpáló lemmája

Minden $L \subseteq \Sigma^*$ reguláris nyelvhez létezik olyan p szám, hogy valahányszor az $u \in L$ szó hossza $\geq p$, u felírható

$$u = xyz$$

alakban úgy, hogy

1. $xy^iz \in L$ minden $i \geq 0$ számra,
2. $|y| > 0$,
3. $|xy| \leq p$.

Reguláris nyelvek pumpáló lemmája

Bizonyítás $L = L(M)$ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges automata.

Legyen $p = |Q|$. Ha $u \in \Sigma^*, |u| \geq p$ és $u \in L$, akkor a q_0-ból induló $q_0, q_1, \ldots, q_n$ számítási sorozatra az u szón teljesül, hogy:

1. $|u| = n \geq p$,
2. $q_n \in F$,
3. $\exists i, j, \quad 0 \leq i < j \leq p, \quad q_i = q_j$.

Legyen x az u i hosszú kezdőszelete, y az x-et követő $j - i$ hosszú rész-szó, z az u $n - j$ hosszú zárószelete. Ekkor az $u = xyz$ felbontásra teljesülnek a Lemma állításai.

Reguláris nyelvek pumpáló lemmája

Példa Az $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\} \subseteq \{0,1\}^*$ nyelv nem reguláris.

Bizonyítás Belátjuk, hogy

$$\forall p \quad \exists u \in L, |u| \geq p \quad \forall x, y, z$$
$$u = xyz, \quad |xy| \leq p, \quad |y| > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists i \quad xy^i z \notin L.$$

Legyen p tetszőleges. Tekintsük az $u = 0^p 1^p$ szót. Tfh. x, y, z olyan szavak, melyekre $u = xyz, |xy| \leq p$ és $y > 0$. Ekkor xy csupa 0-ból áll, és y tartalmaz legalább egy 0-át. Ha tehát $i \neq 1$, akkor az $xy^i z$ szóban a 0-ák száma különbözik az 1-ek számától, tehát $i \neq 1$ esetén $xy^i z \notin L$.

Környezetfüggetlen nyelvtanok

Környezetfüggetlen nyelvtanok: Chomsky, $\sim$ 1960

Természetes nyelvek struktúrája

Programozási nyelvek

Nyelvek rekurzív megadása:

$L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$

- $\varepsilon \in L$
- $u \in L \Rightarrow 0u1 \in L$

$L = \{u \in \{(,)\}^* : u$ helyesen zárójelezett$\}$

- $\varepsilon \in L$
- $u \in L \Rightarrow (u) \in L$
- $u, v \in L \Rightarrow uv \in L.$

Környezetfüggetlen nyelvtanok

Definíció Környezetfüggetlen nyelvtan egy $G = (V, \Sigma, R, S)$ rendszer, ahol

V véges nemüres halmaz: változók vagy nemterminálisok halmaza

Σ véges nemüres halmaz: terminálisok halmaza, $V \cap \Sigma = \varnothing$

$R:\ A \to w$ alakú szabályok véges halmaza, ahol

$$A \in V, w \in (V \cup \Sigma)^*$$

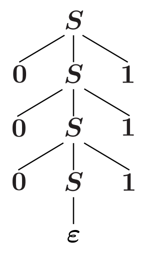
$S \in V$ a kezdőszimbólum.

Környezetfüggetlen nyelvtanok

Példa

$S \to \varepsilon$
$S \to 0S1$ $\qquad (S \to 0S1 \mid \varepsilon)$

$V = \{S\}, \Sigma = \{0, 1\}$,
$R = \{S \to \varepsilon, S \to 0S1\}$, kezdőszimbólum: S
$S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 000S111 \Rightarrow 000111$ derivláció



derivációs fa

Környezetfüggetlen nyelvtanok

Definíció Legyen $G = (V, \Sigma, R, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan, $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$.

1. Azt mondjuk, hogy u közvetlenül deriválja a v szót, $u \Rightarrow v$, ha létezik az $u = u_1 A u_2$ és $v = u_1 w u_2$ felbontás úgy, hogy $A \rightarrow w \in R$.
2. Egy $u_0, u_1, \ldots, u_n \quad (n \geq 0)$ sorozatot a v szó u-ból való derivációjának nevezünk, ha

$$u_0 = u, u_n = v$$

$$u_{i-1} \Rightarrow u_i \quad i = 1, \ldots, n$$

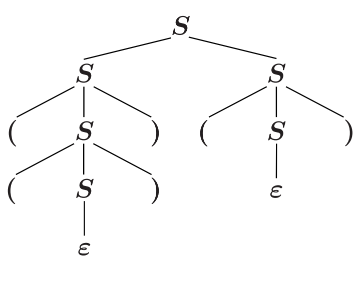
3. Azt mondjuk, hogy a v deriválható vagy levezethető u-ból, ha létezik a v-nek u-ból való derivációja: $u \Rightarrow^* v$.
4. A G által generált nyelv:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* : S \Rightarrow^* w\}$$

Környezetfüggetlen nyelvtanok

Példa

$S \rightarrow SS \mid (S) \mid \varepsilon$
$S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ((S))S \Rightarrow (())S \Rightarrow (())(S) \Rightarrow (())()$

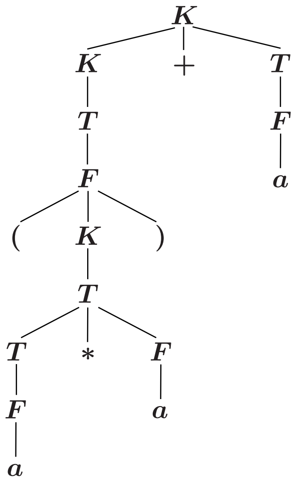


Környezetfüggetlen nyelvtanok

Példa

$$\begin{aligned} K &\to K + T \mid T \\ T &\to T * F \mid F \\ F &\to (K) \mid a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &\Rightarrow K + T \Rightarrow T + T \\ &\Rightarrow F + T \Rightarrow (K) + T \\ &\Rightarrow (T) + T \Rightarrow (T * F) + T \\ &\Rightarrow (F * F) + T \Rightarrow (F * a) + T \\ &\Rightarrow (F * a) + F \Rightarrow (a * a) + F \\ &\Rightarrow (a * a) + a \end{aligned}$$



Derivációs fák

Definíció Legyen $G = (V, \Sigma, R, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan. G feletti derivációs fa olyan véges, irányított, rendezett fa, mely csúcsai a $V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ halmaz elemeivel cimkézettek úgy, hogy valahányszor egy csúcs és leszármazottainak címkéi rendre $X, X_1, \ldots, X_n \quad (n \geq 1)$, mindannyiszor $X \to X_1 \ldots X_n \in R$. Továbbá minden levél címkéje az $\{\varepsilon\} \cup \Sigma$ halmazban van, és ha egy csúcs valamely leszármazottja ϵ-nal címkézett, akkor a csúcsnak egyetlen leszármazottja van.

Ha a gyökér címkéje X, akkor azt mondjuk, hogy a derivációs fa X-ből indul.

A derivációs fa leveleinek, illetve a levelek címkéinek sorozata a derivációs fa határa. Ez egy Σ^*-beli szó.

Derivációs fák

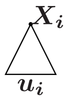
Állítás Ha $X \Rightarrow^* u \in \Sigma^*$, akkor létezik olyan X-ből induló derivációs fa, mely határa u.

Bizonyítás (vázlat)

$X = v_0 \Rightarrow v_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_n = u$.

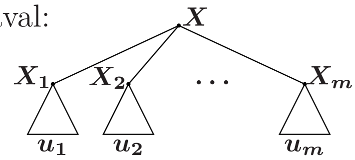
$n = 0.$ Ekkor $X = u \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. $\cdot\, u$

$n > 0.$ Legyen $v_1 = X_1 \ldots X_m$. Ekkor u felbontható $u_1 \ldots u_m$ alakban úgy, hogy minden i-re $X_i \Rightarrow^* u_i$ kevesebb, mint n lépésben.

Így léteznek 

derivációs fák.

Ezek felhasználásával:



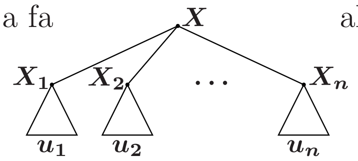
Derivációs fák

Állítás Ha létezik olyan X-ből induló derivációs fa, melynek határa az $u \in \Sigma^*$ szó, akkor $X \Rightarrow^* u$.

Bizonyítás (vázlat)

A derivációs fa n mélysége szerinti indukcióval.

$n = 0.$ Ekkor $X = u \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. Nyilván $X \Rightarrow^* u$.

$n > 0.$ Ekkor a fa 

alakú.

Az indukciós feltevés szerint $X_i \Rightarrow^* u_i, i = 1, \ldots, n$. Így $X \Rightarrow X_1 \ldots X_n \Rightarrow^* u_1 X_2 \ldots X_n \Rightarrow^* u_1 u_2 X_3 \ldots X_n \Rightarrow^* u_1 u_2 \ldots u_n = u$.

Baloldali deriváció

Megjegyzés Az előző konstrukcióval baloldali derivációhoz jutunk. Azt mondjuk, hogy egy

$$u_0 \Rightarrow u_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_n$$

deriváció baloldali, ha minden $i < n$ számra u_{i+1} úgy áll elő az u_i szóból, hogy az u_i-ben előforduló első nemterminálist írjuk át. Jobboldali derivációk hasonlóan definiálhatóak.

Baloldali deriváció jelölése:

$$u_0 \Rightarrow_l u_1 \Rightarrow_l \ldots \Rightarrow_l u_n, \quad \text{vagy} \quad u_0 \Rightarrow_l^* u_n$$

Derivációs fák és baloldali derivációk

Következmény Legyen $G = (V, \Sigma, R, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan. A következők ekvivalensek egy $u \in \Sigma^*$ szóra:

1. $u \in L(G)$
2. $S \Rightarrow_l^* u$
3. Létezik olyan S-ből induló derivációs fa, melynek határa u.

Megjegyzés Egy $u \in \Sigma^*$ szónak az S-ből induló derivációs fái és az S-ből induló baloldali derivációi között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van. A $G = (V, \Sigma, R, S)$ nyelvtant egyértelműnek nevezzük, ha minden $u \in L(G)$ szónak pontosan egy S-ből induló baloldali levezetése (derivációs fája) van.

Környezetfüggetlen nyelvek

Definícó Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet környezetfüggetlennek nevezünk, ha létezik olyan G környezetfüggetlen nyelvtan, melyre $L = L(G)$.

Állítás Minden reguláris nyelv környezetfüggetlen.

Bizonyítás

$L \in \Sigma^*, L = L(M), M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nemdeterminisztikus véges automata.

$G = (Q, \Sigma, R, q_0)$
$R = \{q \to aq' : q' \in \delta(q, a)\} \cup \{q \to \varepsilon : q \in F\}$

Ekkor $L = L(G)$

A megadott nyelvtan jobblineáris.

Környezetfüggetlen nyelvek

Másik bizonyítás

E reg. kifejezés $\longrightarrow G_E = (V_E, \Sigma, R_E, S_E)$ nyelvtan

- $a \in \Sigma$ — $G_a = (\{S\}, \Sigma, \{S \to a\}, S); G_\varnothing = (\{S\}, \Sigma, \varnothing, S)$
- $E = (E_1 + E_2)$ — $G_E = (V_{E_1} \cup V_{E_2} \cup \{S\}, \Sigma, R_{E_1} \cup R_{E_2} \cup \{S \to S_{E_1}, S \to S_{E_2}\}, S)$ feltesszük, hogy $V_{E_1} \cap V_{E_2} = \varnothing, S \notin V_{E_1} \cup V_{E_2}$
- $E = (E_1 \cdot E_2)$ — $G_E = (V_{E_1} \cup V_{E_2} \cup \{S\}, \Sigma, R_{E_1} \cup R_{E_2} \cup \{S \to S_{E_1} S_{E_2}\}, S)$, $V_{E_1} \cap V_{E_2} = \varnothing, S \notin V_{E_1} \cup V_{E_2}$
- $E = (E_1)^*$ — $G_E = (V_{E_1} \cup \{S\}, \Sigma, R_{E_1} \cup \{S \to SS_{E_1}, S \to \varepsilon\}, S)$, $S \notin V_{E_1}$

Környezetfüggetlen nyelvek

Tétel A környezetfüggetlen nyelvek zártak a reguláris műveletekre.

Bizonyítás Lásd az előző konstrukciókat.

Megjegyzés A környezetfüggetlen nyelvek nem zártak a komplemens és metszet képzésre.

Chomsky normálforma

Definíció Egy $G = (V, \Sigma, R, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan Chomsky normál formában adott, ha R minden szabálya

$$A \rightarrow BC \text{ vagy } A \rightarrow a \text{ alakú,}$$

ahol $A, B, C \in V, a \in \Sigma$, esetleg az $S \rightarrow \varepsilon$ szabály kivételével, de ekkor S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Tétel Minden környezetfüggetlen nyelv generálható olyan környezetfüggetlen nyelvtannal, mely Chomsky normál formában adott.

1. ε jobboldalú szabályok eliminálása.
2. Láncszabályok eliminálása.
3. Jobboldalak átalakítása.

Chomsky normálforma

Legyen $G = (V, \Sigma, R, S)$.

1.1. Meghatározzuk azon $A \in V$ nemterminálisok halmazát, amelyekre $A \Rightarrow^* \varepsilon$.

   - $V_0 := \{A \in V : A \to \varepsilon \in R\}$
   - Mindaddig, amíg van olyan $A \to w$ szabály, melyre $A \in V - V_0$ és $w \in V_0^+$, legyen $V_0 := V_0 \cup \{A\}$.

   Állítás $A \in V_0 \Leftrightarrow A \Rightarrow^* \varepsilon$.

1.2. Elhagyjuk az összes $A \to \varepsilon$ alakú szabályt, továbbá minden $A \to w$, $w \in (V \cup \Sigma)^+$ alakú szabályt helyettesítünk az összes olyan $A \to w'$ szabály halmazával, ahol $w' \neq \varepsilon$ úgy áll elő w-ből, hogy w-ben törlünk minden lehetőség szerint néhány V_0-beli nemterminálist.

Chomsky normálforma

1.3. Amennyiben $S \in V_0$, felveszünk egy új S_0 nemterminálist és az $S_0 \to \varepsilon, S_0 \to S$ szabályokat. S_0 lesz az új kezdőszimbólum. Ha $S \notin V_0$, akkor S marad a kezdőszimbólum.

Állítás Az így előálló $G' = (V', \Sigma, R', S')$ nyelvtanra teljesülnek az alábbiak:

(a) $L(G) = L(G')$

(b) R' nem tartalmaz ε jobboldalú szabályt az esetleges $S' \to \varepsilon$ szabály kivételével, amikor is S' nem fordul elő szabály jobboldalán.

Chomsky normálforma

Tekintsük a $G' = (V', \Sigma, R', S')$ nyelvtant.

2.1. Minden $A \in V'$ nemterminálisra határozzuk meg az összes olyan $B \in V'$ nemterminális halmazát, amelyre $A \Rightarrow^* B$ teljesül.

2.2. Hagyjuk el az összes $A \to B,\ A, B \in V'$ láncszabályt, majd vegyük az összes olyan $A \to w, w \notin V'$ szabályt amelyekre létezik olyan B, hogy

$$A \Rightarrow^* B \text{ és } B \to w \in R'.$$

Így kapjuk a $G'' = (V'', \Sigma, R'', S'')$ nyelvtant.

Állítás $L(G) = L(G'')$. Továbbá G''-re teljesül, hogy láncszabály mentes, és egy esetleges $S'' \to \varepsilon$ szabály kivételével minden szabály jobboldala ε-tól különböző. Ha $S'' \to \varepsilon$ szabály, akkor S'' nem fordul elő szabály jobboldalán.

Chomsky normálforma

Tekintsük a $G'' = (V'', \Sigma, R'', S'')$ nyelvtant.

3.1. Minden $a \in \Sigma$-ra vegyünk fel egy X_a nemterminálist és az $X_a \to a$ szabályt.

3.2. Minden R''-ben lévő nem $A \to a$ alakú szabály jobboldalán az a nemterminális minden egyes előfordulását helyettesítsük X_a-val.

3.3. Majd minden egyes így átalakított szabályra, mely jobboldalának hossza > 2, végezzük el az alábbiakat.

- Legyen a szabály $A \to A_1 \dots A_n \quad (n > 2)$
- Vezessük be az $A \to A_1B_1$, $B_1 \to A_2B_2$, $\dots$, $B_{n-2} \to A_{n-1}A_n$ szabályokat, ahol $B_1, \dots, B_{n-2}$ új nemterminálisok.
- Az $A \to A_1 \dots A_n$ szabályt cseréljük ki az új szabályokkal.

Chomsky normálforma

Állítás A G''-ből így kapott $\bar{G} = (\bar{V}, \Sigma, \bar{R}, \bar{S})$ nyelvtan Chomsky normál formában van és $L(G) = L(\bar{G})$.

Megjegyzés

- Ha $G = (V, \Sigma, R, S)$ Chomsky normál formában van, akkor $\varepsilon \in L(G) \Leftrightarrow S \to \varepsilon \in R$.
- A bizonyítás algoritmust ad arra, hogyan konvertáljunk egy tetszőleges környezetfüggetlen nyelvtant Chomsky normál formába.

Chomsky normálforma

Példa

$$\begin{array}{lcl} S & \to & ASA \mid aB \\ A & \to & B \mid S \\ B & \to & b \mid \varepsilon \end{array} \qquad V_0 = \{A, B\}$$

$$\begin{array}{lcl} S & \to & ASA \mid AS \mid SA \mid S \mid aB \mid a \\ A & \to & B \mid S \\ B & \to & b \end{array} \qquad \begin{array}{c} S \Rightarrow^* S \quad A \Rightarrow^* \\ B \;\; A \Rightarrow^* S \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} S & \to & ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a \\ A & \to & b \mid ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a \\ B & \to & b \end{array}$$

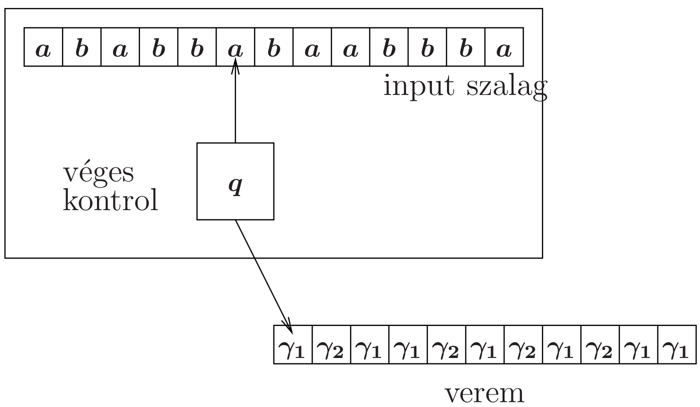
Chomsky normálforma

$$
\begin{array}{lcl}
S & \longrightarrow & ASA \mid AS \mid SA \mid X_aB \mid a \\
A & \longrightarrow & b \mid ASA \mid AS \mid SA \mid X_aB \mid a \\
X_a & \longrightarrow & a \\
B & \longrightarrow & b
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
S & \longrightarrow & AY \mid AS \mid SA \mid X_aB \mid a \\
Y & \longrightarrow & SA \\
A & \longrightarrow & b \mid AY \mid AS \mid SA \mid X_aB \mid a \\
X_a & \longrightarrow & a \\
B & \longrightarrow & b
\end{array}
$$

Veremautomaták

Véges automata:



Veremautomata:

Veremautomaták

Definíció Veremautomata egy $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ rendszer, ahol Q, Σ, q_0, F ugyanazok, mint véges automata esetén,

Γ véges, nemüres halmaz, a verem abc,

$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to P(Q \times \Gamma_\varepsilon)$ az átmenetfüggvény.

Az $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ veremautomata a következő módon működik. Akkor fogadja el a $w \in \Sigma^*$ szót, ha
$\exists w_1, \dots, w_m \in \Sigma_\varepsilon, r_0, \dots, r_m \in Q, s_0, \dots, s_m \in \Gamma^*$

1. $w = w_1 \dots w_m$
2. $r_0 = q_0, s_0 = \varepsilon$
3. $\forall i < m \ (r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$ ahol $s_i = at$ és $s_{i+1} = bt$
   valamely $a, b \in \Gamma_\varepsilon$, $t \in \Gamma^*$ esetén.
4. $r_m \in F$.

Veremautomaták

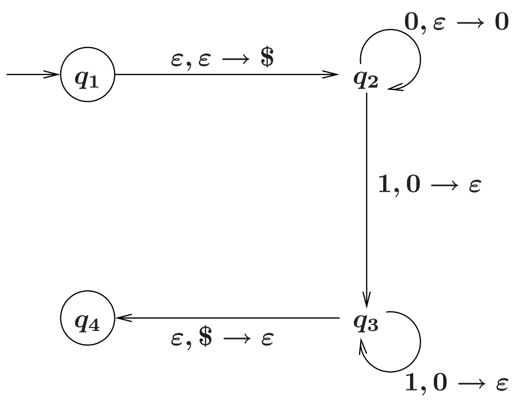
Jelölés $L(M)$ jelöli az M által elfogadott $w \in \Sigma^*$ szavak halmazát. $L(M)$-et az M által felismert nyelvnek nevezzük.

Példa $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$

$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \quad \Sigma = \{0, 1\} \quad \Gamma = \{0, \$\} \quad F = \{q_1, q_4\}$

Input	0			1			ε		
Verem	0	\$	ε	0	\$	ε	0	\$	ε
q_1									$\{(q_2, \$)\}$
q_2			$\{(q_2, 0)\}$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$					
q_3				$\{(q_3, \varepsilon)\}$				$\{(q_4, \varepsilon)\}$	
q_4									

Veremautomaták



$(q_1, \varepsilon, 0011) \vdash (q_2, \$, 0011) \vdash (q_2, 0\$, 011) \vdash (q_2, 00\$, 11) \vdash (q_3, 0\$, 1) \vdash (q_3, \$, \varepsilon) \vdash (q_4, \varepsilon, \varepsilon)$

Veremautomaták

Megjegyzés

1. A veremautomata fogalmát módosíthatjuk úgy, hogy kezdetben a veremben egy rögzített Γ-beli betű legyen, és úgy is, hogy
2. a verembe az egyes átmenetek esetén 1-nél hosszabb szó is kerülhessen. Ekkor

$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to P(Q \times \Gamma^*)$$

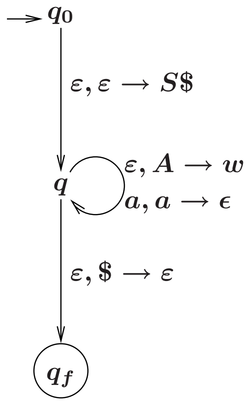
$\delta(q, a, b)$ véges minden $q \in Q, a \in \Sigma_\varepsilon, b \in \Gamma_\varepsilon$ esetén.

3. A veremautomata nemdeterminisztikus modell.

Veremautomaták

Tétel Minden környezetfüggetlen nyelv felismerhető veremautomatával.

Bizonyítás $\boldsymbol{G = (V, \Sigma, R, S)}$



ha $\boldsymbol{A \to w \in R}$
ha $\boldsymbol{a \in \Sigma}$

Veremautomaták

Tétel Minden veremautomatával felismerhető nyelv környezetfüggetlen.

Megjegyzés Determinisztikus az $\boldsymbol{M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)}$ veremautomata, ha

1. $\boldsymbol{|\delta(q, a, b)| \leq 1 \quad q \in Q, a \in \Sigma_\varepsilon, b \in \Gamma_\varepsilon}$
2. $\boldsymbol{\delta(q, \varepsilon, b) \neq \varnothing \Rightarrow \delta(q, a, b) = \varnothing \quad q \in Q, a \in \Sigma, b \in \Gamma_\varepsilon}$
3. $\boldsymbol{\delta(q, a, \varepsilon) \neq \varnothing \Rightarrow \delta(q, a, b) = \varnothing \quad q \in Q, a \in \Sigma_\varepsilon, b \in \Gamma}$

Nem igaz az, hogy minden környezetfüggetlen nyelv felismerhető determinisztikus veremautomatával.

Környezetfüggetlen nyelvek pumpáló lemmája

Lemma Tetszőleges L környezetfüggetlen nyelvhez van olyan $p \geq 1$ szám, hogy valahányszor $w \in L$, $|w| \geq p$, a w szó mindig felbontható

$$w = uvxyz$$

alakban úgy, hogy

1. $\forall i \geq 0 \quad uv^i xy^i z \in L$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| < p$.

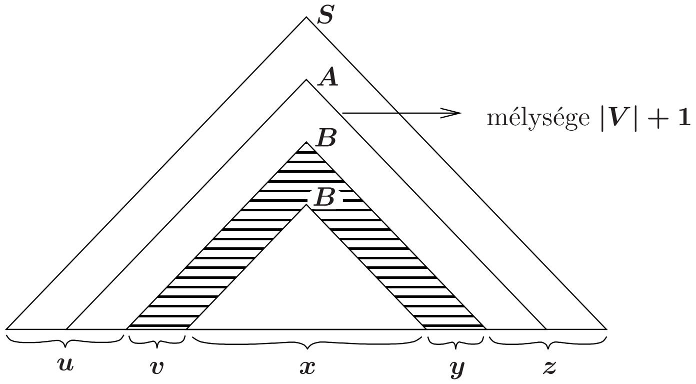
Környezetfüggetlen nyelvek pumpáló lemmája

Bizonyítás Legyen $L = L(G)$, ahol $G = (V, \Sigma, R, S)$ Chomsky normál formában adott.

- Ha t az X nemterminálisból induló derivációs fa mely határa terminális szó és t mélysége $\leq n + 1$, akkor a t határán lévő szó hossza $\leq 2^n$.
- Legyen $p = 2^{|V|} + 1$.
- Legyen $w \in L$, $|w| \geq p$. Legyen t a w szó S-ből induló derivációs fája. Ekkor t mélysége $> |V|$.

(Fa mélysége: leghosszabb úton lévő élek száma.)

Környezetfüggetlen nyelvek pumpáló lemmája



Környezetfüggetlen nyelvek pumpáló lemmája

Állítás Az $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ nyelv nem környezetfüggetlen.

Bizonyítás Belátjuk, hogy $\forall p > 0\ \exists w \in L, |w| \geq p$, hogy a w tetszőleges $w = uvxyz$ felbontására, hogy $|vy| > 0, |vxy| < p$, létezik olyan i, amelyre $uv^i xy^i z \notin L$.

Adott p-hez legyen $w = a^p b^p c^p$. Akárhogyan is bontjuk fel w-ét $w = uvxyz$ alakban úgy, hogy $|vy| > 0, |vxy| < p$, lesz olyan betű, mondjuk ξ, amely nem fordul elő vy-ban. Így $uxz \notin L$.

Környezetfüggetlen nyelvek pumpáló lemmája

Állítás Az $L = \{w\#w : w \in \{0,1\}^*\}$ nyelv nem környezetfüggetlen.

Bizonyítás Adott p-hez tekintsük a $0^p1^p\#0^p1^p$ szót ...

Állítás Az $L' = \{w\#w' : w, w' \in \{0,1\}^*, w \neq w'\}$ nyelv környezetfüggetlen.

Következmény A környezetfüggetlen nyelvek nem zártak a komplemens és metszetképzésre.

Bizonyítás Az $\{a^nb^nc^m : n,m \geq 0\}$ és $\{a^nb^mc^m : n,m \geq 0\}$ nyelvek környezetfüggetlenek, de metszetük nem az.

Nyelvtanok

Definíció (Általános) nyelvtan egy $G = (V, \Sigma, R, S)$ rendszer, ahol V, Σ, S ugyanazok, mint környezetfüggetlen nyelvtan esetén, R pedig $u \to v$ alakú szabályok véges halmaza, ahol $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ és u tartalmaz legalább egy nemterminálist.

Definíció Legyen $G = (V, \Sigma, R, S)$ nyelvtan, $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$.

- $u \Rightarrow v$ ha létezik olyan $x, y, y', z \in (V \cup \Sigma)^*$, amelyre $u = xyz, v = xy'z, y \to y' \in R$.
- $u \Rightarrow^* v$ ha létezik olyan $n \geq 0$ és $w_0, w_1, \ldots, w_n \in (V \cup \Sigma)^*$, hogy $$u = w_0, w_0 \Rightarrow w_1, \ldots, w_{n-1} \Rightarrow w_n, w_n = v.$$

A G által generált nyelv: $L(G) = \{u \in \Sigma^* : S \Rightarrow^* u\}$.

Nyelvtanok

Példa

$$
\begin{array}{llll}
G: & S & \longrightarrow & aSBc \mid \varepsilon \\
 & cB & \longrightarrow & Bc \\
 & aB & \longrightarrow & ab \\
 & bB & \longrightarrow & bb
\end{array}
\qquad L(G) = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}
$$

$$
\begin{array}{llll}
G': & S_0 & \longrightarrow & S \mid \varepsilon \\
 & S & \longrightarrow & aSBC \mid aBC \\
 & CB & \longrightarrow & XB \\
 & XB & \longrightarrow & XC \\
 & XC & \longrightarrow & BC \\
 & aB & \longrightarrow & ab \\
 & bB & \longrightarrow & bb \\
 & C & \longrightarrow & c
\end{array}
\qquad L(G') = L(G)
$$

Nyelvtanok

Definíció Környezetfüggőnek nevezünk egy $G = (V, \Sigma, R, S)$ nyelvtant, ha R minden eleme $uXv \longrightarrow uwv$ alakú, ahol u, v, w $(V \cup \Sigma)^*$-beli szavak, $X \in V$, $w \neq \varepsilon$. Ez alól csak egyetlen kivétel lehet, nevezetesen az $S \longrightarrow \varepsilon$ szabály. Ha ez R-ben van, akkor kikötjük azt, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Definíció Jobblineárisnak nevezünk egy $G = (V, \Sigma, R, S)$ nyelvtant, ha R minden eleme $A \longrightarrow uB$ vagy $A \longrightarrow u$ alakú, ahol $A, B \in V, u \in \Sigma^*$.

Példa G' környezetfüggő.

Chomsky-féle hierarchia

Jobblineáris nyelvtan – **3**-as típusú nyelvtan

Környezetfüggetlen nyelvtan – **2**-es típusú nyelvtan

Környezetfüggő nyelvtan – **1**-es típusú nyelvtan

Általános nyelvtan – **0**-ás típusú nyelvtan

Definíció Legyen $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet i típusúnak nevezünk, ha generálható i típusú nyelvtannal. Jelölés: $\mathcal{L}_i$

$i = 3$: jobblineáris nyelvek

$i = 1$: környezetfüggő nyelvek

Tétel $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$. Továbbá minden tartalmazás valódi.

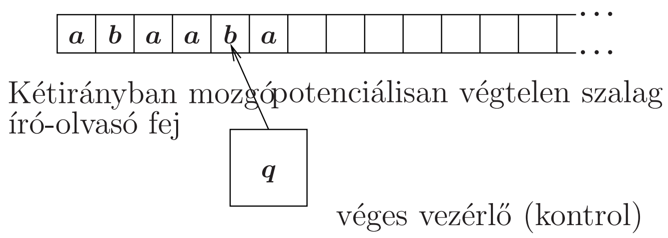
Tétel $\mathcal{L}_3$ a reguláris nyelvek osztálya.

Az $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ nyelvek alkotják a Chomsky-féle hierarchiát.

Turing-gépek

Turing-gép (Alan Turing, 1936)

Véges automata + korlátlan hozzáférésű és nagyságú tár.



Turing-gépek

Példa Az $L = \{w\#w : w \in \{0,1\}^*\}$ nyelv felismerhető Turing-géppel.

1. A bemenet egyszeri elolvasásával ellenőrizzük, hogy a bemenet egyetlen #-et tartalmaz.
2. A szalagot oda-vissza olvasva ellenőrizzük (a vizsgált betűk áthúzásával), hogy a # két oldalán ugyanaz a szó helyezkedik-e el.
3. Amennyiben végig egyezést találunk (az összes betű áthúzásra került), akkor a gép elfogadja, különben elutasítja a bementet.

Turing-gépek

Definíció Turing-gép egy $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ rendszer, ahol:

1. Q az állapotok véges, nemüres halmaza.
2. $q_0 \in Q$ a kezdőállapot.
3. $q_{accept} \in Q$ az elfogadó állapot.
4. $q_{reject} \in Q$ az elutasító állapot.
5. Σ véges, nemüres halmaz, a bemenő jelek (szimbólumok) halmaza.
6. Γ a Σ-t tartalmazó véges halmaz, a szalag szimbólumainak halmaza. $\Gamma - \Sigma$ tartalmaz egy speciális $\sqcup$ karaktert, $\Gamma \cap Q = \emptyset$.
7. $\delta : Q - \{q_{accept}, q_{reject}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ az átmenet függvény.

Turing-gépek

Definíció Konfiguráció: uqv alakú szó, ahol $q \in Q$, $u, v \in \Gamma^*$, $v \neq \varepsilon$. Az uqv konfiguráció a Turing-gép működésének egy olyan pillanatát reprezentálja, amelyben a szalag tartalma $uv\sqcup\sqcup\ldots$, a véges kontrol a q állapotban van, az író-olvasó fej pedig v első karakterét jelöli ki.

Definíció Átmenet a konfigurációk között. Legyen uqv konfiguráció, v első betűje a. Tfh. $\delta(q, a) = (r, b, R)$. Ekkor $uqv \vdash ubrw$, ahol w a v-ből az a betű elhagyásával kapott szó, ha $w \neq \varepsilon$, különben $w = \sqcup$. Tfh. $\delta(q, a) = (r, b, L)$. Ebben az esetben $uqv \vdash wrcbv'$, ahol $u = wc$, $v = av'$, illetve $uqv \vdash urbr'$, ha $u = \varepsilon$ és $v = av'$. Ha $q = q_{accept}$ vagy $q = q_{reject}$, akkor az uqv konfiguráció megállási konfiguráció.

Turing-gépek

Definíció Legyen M a fenti Turing-gép. Az M által felismert nyelv (Jelölése: $L(M)$) az összes olyan $u \in \Sigma^*$ szóból áll, hogy $q_0u\sqcup \overset{*}{\vdash} xq_{accept}y$ valamely $x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon$ szavakra. (Itt $\overset{*}{\vdash}$ a $\vdash$ reláció reflexív-tranzitív lezártja.)

Definíció Egy $L \in \Sigma^*$ nyelv Turing felismerhető, vagy rekurzívan felsorolható, ha $L = L(M)$ valamely M Turing-gépre.

Megjegyzés Egy adott Turing-gép nem feltétlenül áll meg egy u szón, azaz nem biztos, hogy a $q_0u\sqcup \overset{*}{\vdash} xq_{accept}y$ vagy $q_0u\sqcup \overset{*}{\vdash} xq_{reject}y$ relációk valamelyike teljesül valamely x, y esetén.

Definíció Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv (Turing-)eldönthető, vagy rekurzív, ha létezik olyan M Turing-gép, mely minden bemeneten megáll, és amely felismeri az L nyelvet.

Turing-gépek

A Turing-gép néhány variánsa

1. Többszalagos Turing-gép
   - $k(> 1)$ szalag, mindegyik külön író-olvasó fejjel
   - Kezdetben az első szalag tartalmazza a bemenetet, a többi üres
   - $\delta : (Q - \{q_{accept}, q_{reject}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$

   Tétel Minden többszalagos Turing-géphez létezik ekvivalens, egyszalagos Turing-gép

2. Turing-gép két irányban végtelen szalaggal
3. Kétdimenziós Turing-gép

Nemdeterminisztikus Turing-gépek

4. Nemdeterminisztikus Turing-gép $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$

$$\delta : (Q - \{q_{accept}, q_{reject}\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

$$L(M) = \{u \in \Sigma^* : \exists x, y \quad q_0 u \sqcup \overset{*}{\vdash} x q_{accept} y\}$$

A gép működése az u szón egy fával reprezentálható. Akkor fogadja el az u szót, ha a fa valamely levele elfogadási konfiguráció.

Tétel Ha egy L nyelv felismerhető nemdeterminisztikus Turing-géppel, akkor L Turing felismerhető.

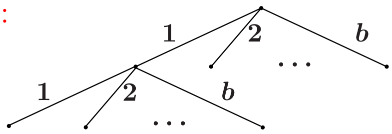
Bizonyítás Legyen adott az $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ nemdet. Turing-gép. Elkészítünk egy olyan D többszalagos (determinisztikus) Turing-gépet, melyre $L(D) = L(M)$. D szélességi kereséssel megvizsgálja adott u szón az M kiszámítási fáját. Ha van olyan csúcs, mely elfogadási konfiguráció, akkor elfogadja az u szót. Különben D nem áll meg az u szón.

Nemdeterminisztikus Turing-gépek

D-nek $\mathbf{3}$ szalagja van.

- input szalag
- szimulációs szalag
- cím szalag

Címzés:



Egy nemdeterminisztikus Turing-gép eldönti az L nyelvet, ha felismeri, és ha minden kiszámítási út véges és elfogadási vagy elutasítási konfigurációhoz vezet.

Tétel Ha egy nyelv eldönthető nemdeterminisztikus Turing-géppel, akkor eldönthető.

Turing-géppel felsorolható nyelvek

Definíció Azt mondjuk, hogy az M $\mathbf{2}$-szalagos Turing-gép felsorolja az L nyelvet, ha üres bemeneti szalaggal indítva másik szalagján, esetleg ismétlésekkel, felsorolja az L elemeit.

Tétel Egy L nyelv akkor és csakis akkor sorolható fel Turing-géppel, ha Turing felismerhető.

E felsoroló Turing-gép $\Rightarrow$ M felismerő Turing-gép

M működése: Adott w szón,

- futtatja E-t,
- valahányszor E kiír a kimenő szalagjára egy szót, azt összehasonlítja w-vel,
- ha egyszer egyezést talál, elfogadja w-ét.

Turing-géppel felsorolható nyelvek

M felismerő Turing-gép $\Rightarrow$ E felsoroló Turing-gép

E működése:

- $i = 1, 2, 3, \ldots$ esetén végtelen ciklusban futtatja M-et legfeljebb i lépésig az első i szó mindegyikén (Σ^* elemeit $w_1, w_2, \ldots$ lexikografikusan felsoroljuk).
- Ha valamelyik w_j szót legfeljebb i lépésben M elfogadja, akkor E kiírja w_j-ét a kimenő szalagra.

A kiszámítás egyéb modelljei

A kiszámítás egyéb modelljei:

- RAM vagy regiszter-gép
- minden univerzális programozási nyelv ($LISP, PASCAL, \ldots$)
- nyelvtanok
- és még számos más modell (λ-kiszámíthatóság, Markov-algoritmus, ...)

Ezek mindegyikéről kiderült, hogy ekvivalens a Turing-géppel.

Tétel Egy L nyelv akkor és csakis akkor Turing-felismerhető, ha az $\mathcal{L}_0$ nyelvosztályba esik.

Algoritmusok

Algoritmusok a matematikában: az ókortól (prímtesztelés, legnagyobb közös osztó, ...)

Az algoritmus fogalmának formalizálása: 1930-as évek

Hilbert 1900: 10. probléma

Adjunk meg olyan algoritmust, mely tetszőleges egész együtthatós többváltozós polinomról eldönti, van-e megoldása

Matijasevič 1971:

Ilyen algoritmus nem létezik

Church-Turing tézis 1936:

Az algoritmus intuitív fogalma = Turing-géppel megoldható algoritmus

Algoritmusok

A tézis bizonyítékai:

A matematikai formalizmusok ekvivalenciái, a konkrét algoritmusok formalizálásai.

Matijasevič tétele formálisan: A

$$\{\, p : p \text{ olyan egész együtthatós polinom, melynek létezik egész értékű gyöke} \,\}$$

nyelv nem dönthető el (nem rekurzív).

A Church-Turing tézis értelmében elegendő algritmusainkat magas szinten megfogalmazni.

Algoritmusok

Példa Gráfok öszefüggősége

$$L = \{\langle G\rangle : G \text{ összefüggő gráf }\}$$

L-et eldöntő Turing-gép:

Adott $\langle G\rangle$ bemenet esetén:

1. Válasszuk ki G első csúcsát és jelöljük meg.
2. Mindaddig, amíg új csúcsok már nem jelölhetők meg, a G minden egyes még meg nem jelölt csúcsára, ha a csúcs csatlakozik egy már megjelölt csúcshoz, akkor jelöljük meg.
3. Ellenőrizzük, hogy az összes csúcsot megjelöltük-e. Ha igen, akkor elfogadjuk a bemenetet, különben elutasítjuk.

Néhány eldönthető nyelv (probléma)

$L_{DFA} = \{\langle M, w\rangle : M$ véges automata, $w \in L(M)\}$

Állítás L_{DFA} eldönthető nyelv.

Bizonyítás Egy T Turing-gép először ellenőrzi, hogy a bemenő szó egy $\langle M, w\rangle$ alakú szó-e, majd:

1. Átmásolja M kódját egy munkaszalagjára.
2. Egy másik munkaszalagján szimulálja M működését a w szón.

Néhány eldönthető nyelv (probléma)

$L_{NFA} = \{\langle M, w\rangle : M$ nemdet. véges automata, $w \in L(M)\}$

Állítás L_{NFA} eldönthető nyelv.

Bizonyítás Egy T Turing-gép először ellenőrzi, hogy a bemenő szó $\langle M, w\rangle$ alakú-e, ahol M nemdet. véges automata, w az M bemenő szava, majd

- a hatványhalmaz konstrukcióval elkészít egy olyan M' determinisztikus véges automatát, mely M-el ekvivalens,
- szimulálja az L_{DFA} nyelvet eldöntő Turing-gépet az $\langle M', w\rangle$ bemeneten.

Néhány eldönthető nyelv (probléma)

$L_{REX} = \{\langle R, w\rangle : R$ reguláris kifejezés, $w \in |R|\}$

Állítás Az L_{REX} nyelv eldönthető.

Bizonyítás A T Turing-gép először ellenőrzi, hogy a bemenet $\langle R, w\rangle$ alakú-e, ahol R reguláris kifejezés és w szó, majd

- elkészít egy olyan M véges, nemdeterminisztikus automatát, melyre $|R| = L(M)$, és
- az L_{NFA} nyelvet eldöntő Turing-gépet szimulálva eldönti, hogy $w \in L(M)$ (azaz $\langle M, w\rangle \in L_{NFA}$) teljesül-e.

Néhány eldönthető nyelv (probléma)

$L_{CFG} = \{\langle G, w\rangle : G$ környezetfüggetlen nyelvtan, $w \in L(G)\}$

$L_{CSG} = \{\langle G, w\rangle : G$ környezetfüggő nyelvtan, $w \in L(G)\}$

Állítás L_{CSG} eldönthető.

Bizonyítás Egy T Turing-gép először eldönti, hogy bemenete $\langle G, w\rangle$ alakú-e, ahol G környezetfüggő nyelvtan, $G = (V, \Sigma, R, S)$, $w \in \Sigma^*$ szó, majd ha ez teljesül:

- Ha $w = \varepsilon$, ellenőrzi, hogy $S \to \varepsilon$ szabály-e.
- Ha $w \neq \varepsilon$, előállítja az összes olyan $u_0, u_1, \ldots, u_k \in (V \cup \Sigma)^*$ ismétlődés nélküli sorozatot, melyre $|u_i| \leq |w|, i = 0, \ldots, k$, majd ellenőrzi, ezek közt van-e olyan, mely a w szó S-ből induló derivációja. (A sorozatokat lexikografikus sorrendben állítja elő.)

Néhány eldönthető nyelv (probléma)

Következmény L_{CFG} eldönthető.

Bizonyítás Egy Turing-gép először eldönti, hogy a bemenő szó $\langle G, w\rangle$ alakú-e, ahol G környezetfüggetlen nyelvtan és w szó, majd ellőállít egy olyan G' Chomsky normál formájú nyelvtant, melyre $L(G) = L(G')$. Majd az L_{CSG} nyelvet eldöntő Turing gépet szimulálva eldönti, hogy $\langle G', w\rangle \in L_{CSG}$ teljesül-e.

Következmény Minden környezetfüggő nyelv rekurzív.

Bizonyítás Legyen L adott környezetfüggő nyelv, $L \subseteq \Sigma^*$. Létezik olyan G_0 környezetfüggetlen nyelvtan, melyre $L = L(G_0)$. Ha adott $w \in \Sigma^*$ szó, ahhoz, hogy eldöntsük $w \in L$ teljesül-e, szimuláljuk az L_{CSG} nyelvet eldöntő Turing-gépet a $\langle G_0, w\rangle$ szón.

Néhány eldönthető nyelv (probléma)

Következmény Minden reguláris és minden környezetfüggetlen nyelv rekurzív.

$E_{DFA} = \{\langle M\rangle : M$ véges, det. automata, melyre $L(M) = \varnothing\}$

$E_{NFA} = \{\langle M\rangle : M$ véges, nemdet. automata, melyre $L(M) = \varnothing\}$

Állítás Az E_{DFA} és E_{NFA} nyelvek rekurzívak.

Bizonyítás Csak E_{NFA}-ra. Egy Turing-gép először eldönti, hogy a bemenet $\langle M\rangle$ alakú-e, ahol M egy $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges nemdeterminisztikus automata, majd eldönti, hogy M átmeneti gráfjában van-e olyan út, mely a q_0 kezdőállapotból végállapotba vezet.

Néhány eldönthető nyelv (probléma)

$EQ_{DFA} = \{\langle M_1, M_2\rangle : M_1$ és M_2 ekvivalens véges det. automaták$\}$

$EQ_{NFA} = \{\langle M_1, M_2\rangle : M_1$ és M_2 ekvivalens véges nemdet. automaták$\}$

Állítás EQ_{DFA} és EQ_{NFA} rekurzív nyelvek.

Bizonyítás

$$L(M_1) = L(M_2) \Leftrightarrow (L(M_1) - L(M_2)) \cup (L(M_2) - L(M_1)) = \varnothing$$

$E_{CFG} = \{\langle G\rangle : G$ környezetfüggetlen, $L(G) = \varnothing\}$

Állítás E_{CFG} rekurzív.

Bizonyítás

$$\begin{aligned}
&G = (V, \Sigma, R, S)\\
&V_0 = \{A \in V : \exists u \in \Sigma^* \quad A \to u \in R\}\\
&\quad\vdots\\
&V_{n+1} = V_n \cup \{A : \exists u \in (\Sigma \cup V_n)^* \quad A \to u \in R\}\\
&L(G) \neq \varnothing \Leftrightarrow S \in V_k, \text{ ahol } |V| = k.
\end{aligned}$$

Néhány eldönthetetlen nyelv (probléma)

$E_{CSG} = \{\langle G\rangle : G$ környezetfüggő, $L(G) = \varnothing\}$

$EQ_{CFG} = \{\langle G_1, G_2\rangle : G_1, G_2$ környezetfüggetlen nyelvtanok, $L(G_1) = L(G_2)\}$

Állítás A fenti nyelvek nem rekurzívak.

Néhány eldönthetetlen nyelv (probléma)

$L_{TM} = \{\langle M, w\rangle : M$ Turing-gép, $w \in L(M)\}$

Tétel Az L_{TM} nyelv nem rekurzív.

Bizonyítás Indirekt bizonyítás. Tfh. L_{TM} rekurzív. Ekkor létezik olyan M Turing-gép, mely eldönti az L_{TM} nyelvet:

$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} \text{accept} & \text{ha } w \in L(M) \\ \text{reject} & \text{ha } w \notin L(M) \end{cases}$$

Ezek után működjön a D Turing-gép az alábbi módon. Ha adott egy M Turing-gép $\langle M\rangle$ kódja, akkor

$$D(\langle M\rangle) = \begin{cases} \text{accept} & \text{ha } \langle M\rangle \notin L(M) \\ \text{reject} & \text{ha } \langle M\rangle \in L(M) \end{cases}$$

D úgy működik, hogy adott $\langle M\rangle$ bemenetre szimulálja H-t az $\langle M, \langle M\rangle\rangle$ szón.

Néhány eldönthetetlen nyelv (probléma)

Így:

$$D(\langle D\rangle) = \begin{cases} \text{accept} & \text{ha } \langle D\rangle \notin L(D) \\ \text{reject} & \text{ha } \langle D\rangle \in L(D) \end{cases} \qquad \text{Ellentmondás}$$

Állítás Az L_{TM} nyelv rekurzívan felsorolható.

Bizonyítás Az U univerzális Turing-gép működjön az $\langle M, w\rangle$ bemenő szón úgy, hogy szimulálja M működését a w szón.

Következmény Létezik olyan rekurzívan felsorolható nyelv, mely nem rekurzív.

Néhány eldönthetetlen nyelv (probléma)

Állítás Ha $L \in \Sigma^*$ rekurzív, akkor $\overline{L} = \Sigma^* - L$ is rekurzív.

Bizonyítás Egy L-et eldöntő Turing-gépben cseréljük fel a q_{accept} és q_{reject} állapotokat.

Tétel Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv akkor és csak akkor rekurzív, ha L és $\overline{L}$ is rekurzívan felsorolható.

Bizonyítás $\Rightarrow$: Az előző állítás felhasználásával.
$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy léteznek az L-et és $\overline{L}$-et felismerő M és $\overline{M}$ Turing-gépek. Adott w szón az N Turing-gép lépésenként felváltva szimulálja M és $\overline{M}$ működését.

Következmény $\overline{L}_{TM}$ nem rekurzívan felsorolható.

Néhány eldönthetetlen nyelv (probléma)

$H_{TM} = \{\langle M, w\rangle : M$ Turing-gép, M megáll w-én$\}$

Állítás A H_{TM} nyelv nem rekurzív.

Bizonyítás (Visszavezetéssel az L_{TM} problémából.)

Tegyük fel, hogy H_{TM} rekurzív. Ekkor működjön a T Turing-gép az $\langle M, w\rangle$ bemeneten a következő módon:

1. Szimulálja a H_{TM}-et eldöntő Turing-gépet az $\langle M, w\rangle$ szón. Ha H_{TM} nem fogadja el az $\langle M, w\rangle$ szót, akkor T sem fogadja el.
2. Ha H_{TM} elfogadja az $\langle M, w\rangle$ szót, akkor T szimulálja az M gépet a w szón.

Néhány eldönthetetlen nyelv (probléma)

$E_{TM} = \{\langle M\rangle : L(M) = \varnothing\}$

Állítás E_{TM} nem rekurzív.

Bizonyítás (Visszavezetéssel az L_{TM} problémából.)

Tegyük fel, hogy E_{TM} rekurzív. Adott $\langle M, w\rangle$ bemeneten a T Turing-gép:

1. Elkészít egy olyan M_w Turing-gépet, mely a w-én kívül elutasít minden bemenő szót, w-én pedig úgy működik, mint M,
2. Az E_{TM}-et eldöntő Turing-gépet felhasználva eldönti, hogy $\langle M_w\rangle \in E_{TM}$ teljesül-e.

Rice tétele

Tétel (Rice) A rekurzívan felsorolható nyelvek egyetlen nemtriviális tulajdonsága sem dönthető el.

Így nem dönthető el, hogy adott M Turing-gép:

- üres nyelvet ismeri-e fel,
- véges nyelvet ismer-e fel,
- reguláris nyelvet ismer-e fel,

  ...

Következmény Nem dönthető el adott M_1, M_2 Turing-gépekre, hogy $L(M_1) = L(M_2)$ teljesül-e.

A Post megfelelkezési probléma

A Post megfelelkezési probléma:

Dominó készlet: $\left\{ \begin{bmatrix} b \\ ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ca \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abc \\ c \end{bmatrix} \right\}$

Ekkor az alábbi dominósorozat tetején és alján lévő szó megegyezik.

$$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ ca \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ca \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ c \end{bmatrix} \right\}$$

Az ilyen dominósorozatot a Dominó készlet megoldásának nevezzük.

A Post megfelelkezési probléma

Tétel A $\{\langle D\rangle : D$ dominókészlet, melynek van megoldása$\}$ nyelv nem rekurzív, azaz nem létezik olyan algoritmus, mely eldöntené adott dominókészletről, hogy van-e megoldása.

A Post megfelelkezési probléma

Tétel Nem létezik olyan algoritmus, mely tetszőleges környezetfüggetlen nyelvtanról eldöntené, hogy egyértelmű-e.

Bizonyítás

$P = \{(u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k) : u_i, v_i \in \Sigma^*\}$ a PMP egy példánya.

$$G_p : \begin{array}{lcl} S & \to & A \mid B \\ A & \to & iAu_i^{-1} \mid iu_i^{-1} \\ B & \to & iBv_i^{-1} \mid iv_i^{-1} \end{array} \qquad i = 1, \ldots, k$$

A Post megfelelkezési probléma

Tétel Nem létezik olyan algoritmus, mely adott G_1, G_2 környezetfüggetlen nyelvtanokról eldönti, hogy $L(G_1) = L(G_2)$ teljesül-e.

Bizonyítás

$P = \{(u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k) : u_i, v_i \in \Sigma^*\}$

G_1 olyan nyelvtan, mely az

$\{i_1 \ldots i_n \# w : w \in \Sigma^*, w \neq (u_{i_1} \ldots u_{i_n})^{-1}$ vagy $w \neq (v_{i_1} \ldots v_{i_n})^{-1}, n > 0\}$ nyelvet generálja

G_2 olyan jobblineáris nyelvtan, mely az $\{1, \ldots, k\}^+ \# \Sigma^*$ reguláris nyelvet generálja.

Bonyolultságelmélet

A kiszámíthatóságelmélet kiterjesztései:
- Relatív kiszámíthatóság, aritmetikai és analitikai hierarchiák
- Bonyolultságelmélet: 60-as évek végétől

Cél: A megoldható (eldönthető) problémák osztályozása a megoldáshoz szükséges erőforrások (idő, tár) mennyisége szerint.

legrosszabb eset

átlagosan

Bonyolultságelmélet

Definíció Legyenek $f, g : N \to R_+$ függvények, ahol $N = \{0, 1, \ldots\}$, R_+ pedig a nem-negatív valós számok halmaza.
$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ ha létezik olyan $c > 0$ és $n_0 \in N$, hogy

$$f(n) \leq c \cdot g(n), \quad n \geq n_0$$

Példa

- $5n^3 + 6n^2 + 1 = \mathcal{O}(n^3)$
- $n^k = \mathcal{O}(2^n)$
- $\log_2 n = \mathcal{O}(\log_3 n)$
- $\log \log n = \mathcal{O}(\log n)$

Bonyolultságelmélet

Példa $L = \{0^k 1^k : k \geq 0\}$

M_1 : Adott w szón:

1. Olvassuk végig a szalagot, hogy ellenőrizzük **1**-es után nem következik-e **0**.
2. Mindaddig, amíg **0** és **1**-es is van a szalagon ismételjük az alábbiakat:
    3. Olvassuk végig a szalagot és húzzunk át egy **0**-át és egy **1**-et.
4. Ha végül nem maradt a szalagon karakter, akkor fogadjuk el a bemenetet. Különben utasítsuk el.

Időigény: $\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$

Bonyolultságelmélet

Példa $L = \{0^k 1^k : k \geq 0\}$

M_2 : Adott w szón:

1. Olvassuk végig a szalagot, és ellenőrizzük, hogy egyetlen **1**-est sem követ **0**.
2. Mindaddíg, amíg legalább egy **0** és egy **1** marad a szalagon, ismételjük az alábbiakat:
    3. Ellenőrizzük, hogy a szalagon maradt karakterek száma páros-e. Ha páratlan elutasítjuk a bemenetet.
    4. Olvassuk végig a szalagot, és húzzuk át minden második **0**-át és **1**-et (az első **0**-át és **1**-et áthúzva).
5. Ha végül nem marad áthúzatlan karakter, akkor elfogadjuk a bemenetet. Különben elutasítjuk.

Időigény: $\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n \log n) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n \log n)$

Bonyolultságelmélet

Példa $L = \{0^k 1^k : k \geq 0\}$

M_3 : Adott w szón:

1. Ellenőrizzük, hogy a szalagon nem követ egyetlen **1**-et sem **0**.
2. Másoljuk a **0**-ákat egy munkaszalagra.
3. Olvassuk végig az **1**-eseket a bemeneten, és minden egyes **1**-esre húzzunk át a munkaszalagon egy **0**-át.
4. Ha mindegyik **0**-át áthúztuk és az **1**-eseket is elolvastuk, akkor fogadjuk el a bemenetet. Különben utasítsuk el.

Időigény: $\mathcal{O}(n)$

Turing gépek időigénye

Definíció Legyen M olyan determinisztikus Turing-gép, amely minden bemeneten megáll. Az M időigénye az az $f : N \to N$ függvény, amelyre $f(n)$ a legfeljebb n-hosszú bemeneten az M által megtett lépések számának maximuma.

Tétel Legyen $t(n) \geq n$. Minden $t(n)$ időigényű többszalagos Turing-géphez létezik ekvivalens, $\mathcal{O}(t^2(n))$ időigényű egyszalagos Turing-gép.

Bizonyítás Mint korábban.

Turing gépek időigénye

Definíció Legyen T olyan nemdeterminisztikus Turing-gép, melynek minden számítási sorozata véges és elfogadáshoz vagy elutasításhoz vezet. A T időigényét az az $f : N \to N$ függvény adja, amelyre tetszőleges n esetén $f(n)$ a T legfeljebb n-hosszú bemeneten való számítási sorozatai hosszának maximuma (= leghosszabb út hossza a T legfeljebb n-hosszú bemeneten való számítási fáiban).

Tétel Legyen T olyan Turing-gép, mint az előző definícióban. Tegyük fel, hogy T időigénye $\leq t(n)$, ahol $t(n) \geq n$. Ekkor létezik T-vel ekvivalens, $2^{\mathcal{O}(t(n))}$ időigényű determinisztikus Turing-gép.

A P nyelvosztály

Definíció

$\boldsymbol{TIME(t(n))} = \{\boldsymbol{L} : \boldsymbol{L}$ eldönthető $\boldsymbol{\mathcal{O}(t(n))}$ időigényű det. Turing-géppel$\}$

Definíció $\mathrm{P} = \bigcup_{k\geq 1} \boldsymbol{TIME(n^k)}$ Polinomidőben eldönthető nyelvek (problémák)

Példa ELÉRHETŐSÉG

$\{\langle \boldsymbol{G, s, t}\rangle : \boldsymbol{G}$ véges, irányított gráf, $\boldsymbol{s, t} \in \boldsymbol{G}$,
létezik $\boldsymbol{s}$-ből $\boldsymbol{t}$-be vezető út $\}$

A P nyelvosztály

Adott $\langle \boldsymbol{G, s, t}\rangle$ bementen:

1. Jelöljük meg az $\boldsymbol{s}$ csúcsot.
2. Mindaddig, amíg már nem jelölhető meg új csúcs, ismételjük meg az alábbiakat:
    3. Olvassuk végig az éleket. Ha olyan $(\boldsymbol{a, b})$ élet találunk, hogy $\boldsymbol{a}$ meg van jelölve, de $\boldsymbol{b}$ nincs, jelöljük meg a $\boldsymbol{b}$ csúcsot.
4. Ha végül $\boldsymbol{t}$ is meg van jelölve, akkor elfogadjuk, különben elutasítjuk a bemenetet.

Időigény: $\boldsymbol{\mathcal{O}(n^2)}$

A P nyelvosztály

Tétel Minden környezetfüggetlen nyelv a P osztályba esik.

Bizonyítás Legyen L környezetfüggetlen nyelv. Ekkor létezik L-et generáló $G = (V, \Sigma, R, S)$ Chomsky normál formában adott nyelvtan.
Legyen $w \in \Sigma^*$, $w = w_1, \ldots, w_n$, $n > 0$.

$$T_{ij} = \{X \in V : X \Rightarrow^* w_i \ldots w_j\} \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

A T_{ij} halmazok mindegyike meghatározható $\mathcal{O}(n)$ időben.

$$T_{ii} = \{X \in V : X \to w_i \in R\} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$T_{ij} = \{X \in V : \exists A, B \quad X \to AB \in R$$
$$A \in T_{ik}, B \in T_{k+1j} \text{ vmely } i \leq k < j \text{ esetén } \}$$
$$\text{ha } i < j$$

Időigény: $\mathcal{O}(n^3)$

Az NP osztály

Mai ismereteinkkel csak kimerítő kereséssel megoldható problémák:

HAMILTON–ÚT

TELJES RÉSZGRÁF

EGÉSZ ÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁS

HÁTIZSÁK

KIELÉGÍTHETŐSÉG (SAT)

A fenti problémák mindegyike megoldható polinomidőben nemdeterminisztikus Turing-géppel – nem realisztikus számítási modell. Egyikről sem ismert, hogy megoldható-e polinomidőben determinisztikus Turing-géppel, azaz, hogy a $\mathbf{P}$ osztályba esik-e.

Az NP osztály

Definíció

$NTIME(t(n)) = \{L : L$ eldönthető $\mathcal{O}(t(n))$ időigényű nemdet. Turing-géppel$\}$

Definíció NP $= \bigcup_{k \geq 1} NTIME(n^k)$

Állítás A HAMILTON-ÚT, TELJES RÉSZGRÁF, EGÉSZ ÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁS, HÁTIZSÁK, SAT problémák mindegyike az **NP** osztályba esik.

Világos, hogy $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$.

Nyitott kérdés: $\mathbf{P} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$.

$\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ akkor és csakis akkor, ha az előző állításban szereplő valamelyik probléma (és akkor mindegyikük) a **P** osztályba esik: **NP** teljes problémák.

Polinom időben verifikálható nyelvek

Definíció Azt mondjuk, hogy egy L nyelv polinom időben verifikálható, ha létezik olyan K nyelv és k szám, hogy $K \in \mathbf{P}$ és

$$L = \{x : \exists y \ \langle x, y \rangle \in K \wedge |y| = \mathcal{O}(|x|^k)\}$$

Példa HAMILTON-ÚT és a többi fent említett probléma (nyelv) mindegyike polinom időben verifikálható.

Tétel $L \in \mathbf{NP} \Leftrightarrow L$ polinom időben verifikálható.

Polinom idejű visszavezetés

Definíció Egy $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ függvény polinomidőben kiszámítható, ha létezik olyan M polinom időigényű Turing-gép, hogy tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szóra megálláskor a szalag taralma $f(w)$.

Definíció Legyenek $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ és $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ nyelvek. Az L_1-nek L_2-re való polinomidejű visszavezetése egy olyan polinomidőben kiszámítható

$$f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$$

függvény, hogy tetszőleges $w \in \Sigma_1^*$ szóra:

$$w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2.$$

Azt mondjuk, hogy L_1 polinomidőben visszavezethető L_2-re, $L_1 \leq_p L_2$, ha létezik az L_1-nek polinomidejű visszavezetése az L_2 nyelvre.

NP-teljes nyelvek

Állítás A $\leq_p$ reláció előrendezés (reflexív és tranzitív).

Állítás Az **NP** osztály zárt a polinomidejű visszavezetésre:

$$L_1 \leq_p L_2, L_2 \in \mathrm{NP} \Rightarrow L_1 \in \mathrm{NP}.$$

Megjegyzés A **P** is nyilvánvalóan zárt. Továbbá ha $L_1, L_2 \in \mathrm{P}$, és L_1, L_2 és komplemenseik sem üresek, akkor $L_1 \leq_p L_2$.

Definíció Egy L nyelv (probléma) **NP**-nehéz, ha $L' \leq_p L$ teljesül minden $L' \in \mathrm{NP}$ nyelvre. Egy L nyelv (probléma) **NP**-teljes, ha $L \in \mathrm{NP}$ és L **NP**-nehéz.

NP-teljes nyelvek

Állítás Tegyük fel, hogy L **NP**-teljes. Ekkor $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \Leftrightarrow L \in \mathbf{P}$.

Bizonyítás $\Rightarrow$: triviális.
$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy $L \in \mathbf{P}$. Ekkor tetszőleges $L' \in \mathbf{NP}$ esetén $L' \leq_p L$ miatt $L' \in \mathbf{P}$. Tehát $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{P}$, így $\mathbf{NP} = \mathbf{P}$.

Álítás Tegyük fel, hogy $L \leq_p L'$. Ha L **NP**-nehéz, akkor L' is az. Továbbá, ha L **NP**-nehéz, akkor L' akkor és csak akkor **NP**-teljes, ha $L' \in \mathbf{NP}$.

Bizonyítás Az első állítás adódik a $\leq_p$ tranzitivitásából. A második az elsőből következik.

NP-teljes nyelvek

Definíció

SAT $= \{\langle\varphi\rangle : \varphi$ kielégíthető konjunktív normálformában (knf) adott logikai kifejezés (formula)$\}$

literál: változó illetve annak negáltja
tag: literálok diszjunkciója
knf: tagok konjunkciója

Példa $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \in$ SAT.

Tétel (Cook) SAT **NP**-teljes.

Bizonyítás Később.

NP-teljes nyelvek

Definíció Legyen $k \geq 1$. kSAT $= \{\langle\varphi\rangle : \langle\varphi\rangle \in$ SAT$, \varphi$ minden tagjában k literál van $\}$.

Következmény 3SAT NP-teljes.

Bizonyítás Nyilvánvalóan 3SAT $\in$ NP. Még belátjuk, hogy SAT $\leq_p$ 3SAT.

c tag	$f(c)$ knf
l	$l \vee l \vee l$
$l_1 \vee l_2$	$l_1 \vee l_2 \vee l_2$
$l_1 \vee l_2 \vee l_3$	$l_1 \vee l_2 \vee l_3$
$l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee l_4$	$(l_1 \vee l_2 \vee x) \wedge (\overline{x} \vee l_3 \vee l_4)$ x új változó
$l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee l_4 \vee l_5$	$(l_1 \vee l_2 \vee x) \wedge (\overline{x} \vee l_3 \vee y) \wedge (\overline{y} \vee l_4 \vee l_5)$ x és y új változók

NP-teljes nyelvek

$l_1 \vee \ldots \vee l_n, \quad n > 5$	$(l_1 \vee l_2 \vee x) \wedge (\overline{x} \vee l_3 \vee y) \wedge \ldots$ $(\overline{z} \vee l_{n-2} \vee u) \wedge (\overline{u} \vee l_{n-1} \vee l_n)$ $x, y, \ldots, z, u$ új változók
φ knf, $\varphi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$	$f(\varphi) = f(c_1) \wedge \ldots \wedge f(c_n)$ ahol minden $f(c_i)$-ben új változókat vezetünk be.

Ekkor f polinomidőben való visszavezetés:

$$\langle\varphi\rangle \in \text{SAT} \Leftrightarrow \langle f(\varphi)\rangle \in 3\text{SAT}.$$

NP-teljes nyelvek

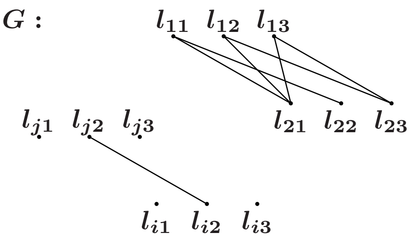
Def. TELJES RÉSZGRÁF $= \{\langle G, k\rangle : G$ véges gráf, $k \geq 1$, G-nek létezik k csúcsú teljes részgráfja$\}$

Tétel TELJES RÉSZGRÁF **NP**-teljes.

Bizonyítás **3**SAT-ból való visszavezetéssel.

$\varphi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_k$
$c_i = l_{i_1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}$

G :



Az összes élet behúzzuk kivéve

- az egy csoporton belül lévő csúcsok köztieket
- az ellentétes literálokkal címkézett csúcsok közt.

NP-teljes nyelvek

Állítás $\varphi \in$ **3**SAT $\Leftrightarrow \langle G, k\rangle \in$ TELJES RÉSZGRÁF.

Tehát **3**SAT $\leq_p$ TELJES RÉSZGRÁF. Mivel **3**SAT **NP**-teljes, és TELJES RÉSZGRÁF $\in$ **NP**, ezért TELJES RÉSZGRÁF is **NP**-teljes.

Következmény FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ **NP**-teljes, ahol

FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $= \{\langle G, k\rangle :$ a G véges gráfnak van k elemű független csúcshalmaza $\}$.

HAMILTON-ÚT **NP-teljes**

HAMILTON-ÚT $= \{\langle G, s, t\rangle : G$ irányított gráf, s, t csúcsok,
$\exists s$-ből t-be Hamilton-út $\}$.

Tétel HAMILTON-ÚT **NP** teljes.

Bizonyítás A **3**SAT **NP**-teljességének felhasználásával.

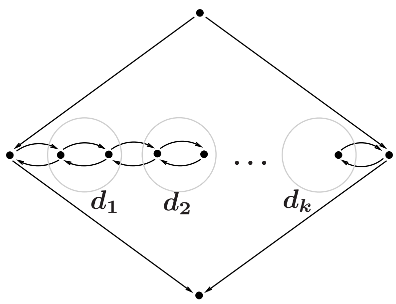
Legyen φ **3**SAT alakú formula:

$$\varphi = d_1 \wedge \ldots \wedge d_k, \quad d_j = a_j \vee b_j \vee c_j$$

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_l$ a felhasznált változók.

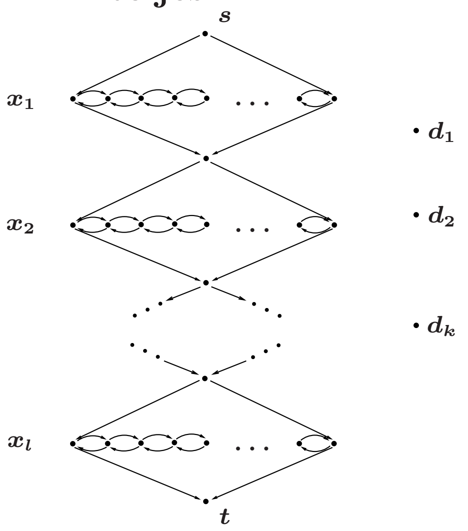
HAMILTON-ÚT **NP-teljes**

x_i-hez tartozó eszköz:



d_j-hez tartozó eszköz:

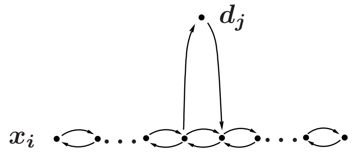
HAMILTON-ÚT NP-teljes



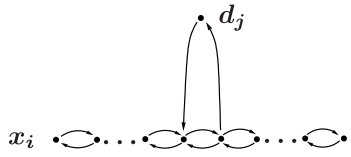
+ a következő fólián lévő élek

HAMILTON-ÚT NP-teljes

d_j tartalmazza x_i-t



d_j tartalmazza $\overline{x}_i$-t



Jelölje G_φ a gráfot. Ekkor:

(1) $\langle\varphi\rangle \in$ 3SAT $\Leftrightarrow \langle G_\varphi, s, t\rangle \in$ HAMILTON-ÚT

(2) $\langle G_\varphi, s, t\rangle$ polinomidejű Turing-géppel elkészíthető $\langle\varphi\rangle$-ből.

SAT **NP-teljes**

SAT $= \{\langle\varphi\rangle : \varphi$ kielégíthető knf$\}$

Tétel SAT **NP**-teljes.

Bizonyítás Csak azt bizonyítjuk, hogy **NP**-nehéz.

$$L \in \mathbf{NP} \qquad L \overset{?}{\leq_p} \text{SAT}$$

$L = L(M)$ M polinomidőkorlátos nemdet. Turing-gép

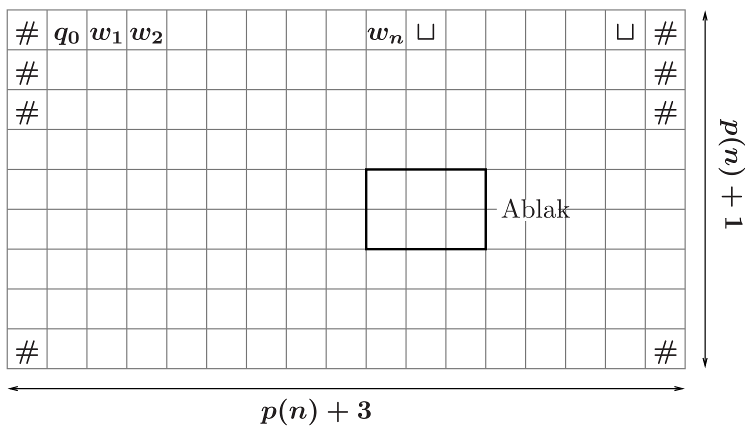
Időkorlát: $p(n) \geq n$

Adott w bemenő szóhoz el kell készíteni egy φ formulát úgy, hogy:

(1) $w \in L \Leftrightarrow \varphi$ kielégíthető,

(2) a $w \mapsto \varphi$ hozzárendelés megvalósítható polinom időkorlátos determinisztikus Turing-géppel.

SAT **NP-teljes**



$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$
$1 \leq i \leq p(n)+1,\ 1 \leq j \leq p(n)+3,\ s \in Q \cup \Gamma \cup \{\#\} \ \mapsto\ x_{i,j,s}$ változó

SAT NP-teljes

Nevezzük az

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6

elrendezést legálisnak, ha megengedett az M átmeneti relációja által. (Üres átmenet is lehetséges.)

Állítás Megadható véges sok olyan $(a_1, \ldots, a_6)$ rendezett legális 6-os úgy, hogy egy táblázat akkor és csak akkor adja meg az M egy lehetséges működését a w szón, ha a táblázat első sorában a w-hez tartozó kezdő konfiguráció van, és minden "ablak" két sora egy legális 6-ost határoz meg.

SAT NP-teljes

Konvenció: $x_{i,j,s} = 1$ annak felel meg, hogy a táblázat (i, j) pozíciójában s szerepel.
$\varphi = \varphi_0 \wedge \varphi_{start} \wedge \varphi_{move} \wedge \varphi_{accept}$

φ_0: A táblázat minden egyes mezőjében pontosan egy karakter van, azaz $\forall i, j\ \exists! s \quad x_{i,j,s}$

$$\varphi_0 = \bigwedge_{i,j} \bigvee_s x_{i,j,s} \wedge \bigwedge_{i,j} \bigwedge_{s \neq t} (\overline{x_{i,j,s}} \vee \overline{x_{i,j,t}})$$

φ_{start} : A táblázat első sorában a w-hez tartozó kezdőkonfiguráció van.

$$\varphi_{start} = x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge \ldots \wedge x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\sqcup} \wedge \ldots \wedge x_{1,p(n)+2,\sqcup} \wedge x_{1,p(n)+3,\#}$$

SAT NP-teljes

φ_{move} : A táblázat minden ablaka legális.

$$\varphi_{move} = \bigwedge_{i,j} \psi_{i,j}$$

$$\psi_{i,j} = \bigvee_{(a_1,\ldots,a_6) \text{ legális}} \begin{array}{l} x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge \\ x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6} \end{array}$$

Itt $1 \leq i \leq p(n), \quad 2 \leq j \leq p(n) + 2$

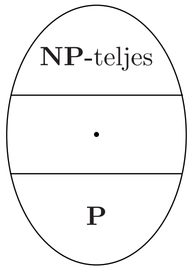
SAT NP-teljes

φ_{accept} : A táblázat utolsó sorában elfogadó konfiguráció van.

$$\varphi_{accept} = \bigvee_{j=2}^{p(n)+2} x_{p(n)+1,j,q_{accept}}$$

Az NP szerkezete

Tétel Ha $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, akkor létezik olyan **NP**-beli L nyelv, amely nincs **P**-ben és nem **NP**-teljes:



Példa az $\{\langle G_1, G_2\rangle : G_1$ és G_2 izomorf gráfok$\}$ nyelvről ismert, hogy **NP**-ben van, de nem ismert, hogy **P**-ben van-e vagy **NP**-teljes-e.

A coNP osztály

Definíció Legyen $\mathcal{C}$ nyelvek osztálya. Ekkor: co$\mathcal{C} = \{\overline{L} : L \in \mathcal{C}\}$.

Állítás Ha $\mathcal{C}$ zárt a polinomidejű visszavezetésre, akkor **co**$\mathcal{C}$ is zárt.

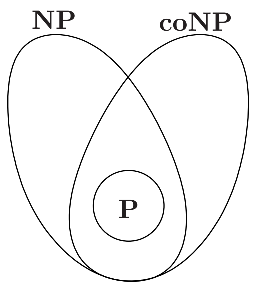
Definíció Legyen $\mathcal{C}$ nyelvek egy osztálya. Egy L nyelv $\mathcal{C}$-nehéz (a polinomidejű visszavezetésre) ha $L' \leq_p L$ teljesül minden $L' \in \mathcal{C}$ nyelvre. Ha L $\mathcal{C}$-nehéz és $L \in \mathcal{C}$, akkor L $\mathcal{C}$-teljes (a polinomidejű visszavezetésre nézve).

Állítás L $\mathcal{C}$-nehéz ($\mathcal{C}$-teljes) $\Leftrightarrow$ $\overline{L}$ **co**$\mathcal{C}$-nehéz (**co**$\mathcal{C}$-teljes).

A coNP osztály

Definíció VALIDITY $= \{\langle\varphi\rangle : \varphi$ azonosan igaz Boole-formula$\}$

Állítás VALIDITY **coNP**-teljes.



Nem ismert, hogy

$$\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$$

igaz-e.
(Ha $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, akkor $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$, mert $\mathbf{P} = \mathbf{coP}$ nyilvánvalóan.)

Tárbonyolultság

Alapvető különbség: a tár újra felhasználható.

További különbség:

szublineáris tárbonyolultság is érdekes,

a bemenet hossza nem számít a felhasznált tár nagyságába.

Definíció Off-line Turing-gép:

- Többszalagos.
- A bemenetet tartalmazó szalagot csak olvashatja. A munkaszalagokra írhat is.

A tárigénybe csak a munkaszalagokon felhasznált terület számít be.

Savitch tétele

Def. $\boldsymbol{SPACE(f(n))} = \{L : L$ eldönthető $\mathcal{O}(f(n))$ tárigényű det. Turing géppel $\}$

$\boldsymbol{NSPACE(f(n))} = \{L : L$ eldönthető $\mathcal{O}(f(n))$ tárigényű nemdet. Turing géppel $\}$

Tétel (Savitch) Ha $f(n) \geq \mathcal{O}(\log n)$, akkor $NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE((f(n))^2)$.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy L-et eldönti az M $\mathcal{O}(f(n))$ tárigényű nemdeterminisztikus Turing-gép. Feltehető, hogy adott w bemeneten minden elfogadó számítási sorozat ugyanabban az elfogadó konfigurációban végződik.
Ha $|w| = n$, a kezdő konfigurációból elérhető konfigurációk száma $c_1 n 2^{\mathcal{O}(f(n))} = 2^{\mathcal{O}(f(n))}$, mérete $\leq c_2 f(n)$. ($f(n) \geq \log n$.)

A továbbiakban csak legfeljebb ilyen méretű konfigurációkat tekintünk.

Savitch tétele

$\boldsymbol{TEST}$: Adott k_1, k_2 konfigurációkra és t, i számokra

1. Ha $t = 1$, ellenőrizzük, hogy $k_1 = k_2$ vagy k_1-ből k_2 legfeljebb egy lépésben megkapható-e.
2. Ha $t > 1$, akkor minden k legfeljebb i méretű konfigurációra:
   3. $TEST(k_1, k, \lceil \frac{t}{2} \rceil, i)$
   4. $TEST(k, k_2, \lceil \frac{t}{2} \rceil, i)$
   5. Ha mindkettő igaz, akkor $TEST(k_1, k_2, t, i)$ is az.
6. Ha korábban nem ért véget az eljárás igaz-zal, akkor $TEST(k_1, k_2, t, i)$ hamis.

Savitch tétele

Az $\boldsymbol{N}$ determinisztikus Turing-gép $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, \ldots}$ esetén

1. teszteli, hogy a kezdőkonfigurációból elérhető-e az elfogadó konfiguráció úgy, hogy közben csak legfeljebb $\boldsymbol{i}$ méretű konfiguráción haladunk át,
2. majd ha 1. nem teljesül, teszteli, hogy egyáltalán elérhető-e $\boldsymbol{i}$ méretű konfiguráció. Ha nem, akkor elutasítja a bemenetet. Különben $\boldsymbol{i}$-t $\boldsymbol{1}$-gyel növeli.

A legnagyobb $\boldsymbol{i}$-érték, melyre $\boldsymbol{TEST}$ meghívásra kerül $\boldsymbol{c_2 f(n)}$-nél nem nagyobb, és a legnagyobb $\boldsymbol{t}$ érték legfeljebb $\boldsymbol{2^{\mathcal{O}(f(n))}}$

Rekurzióban a legnagyobb mélység: $\boldsymbol{\mathcal{O}(f(n)) = \log 2^{\mathcal{O}(f(n))}}$

Egy hívás tárigénye: $\boldsymbol{\mathcal{O}(f(n))}$

Összes tárigény: $\boldsymbol{\mathcal{O}((f(n))^2)}$

A PSPACE és NPSPACE osztályok

Definíció

$$\mathbf{PSPACE} = \bigcup_{k>0} \mathbf{SPACE}(n^k) \qquad \mathbf{NPSPACE} = \bigcup_{k>0} \mathbf{NSPACE}(n^k)$$

Következmény **PSPACE = NPSPACE**

Világos, hogy: $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{EXPTIME}$, ahol

$$\mathbf{EXPTIME} = \bigcup_{k>0} \mathbf{TIME}\left(2^{n^k}\right).$$

Ismert, hogy $\mathbf{P} \subset \mathbf{EXPTIME}$. Az a sejtés, hogy mindegyik tartalmazás valódi.

QBF PSPACE-teljes

Def. QBF $= \{\langle\varphi\rangle : \varphi$ igaz prenex alakú zárt Boole-formula $\}$

Példa $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 [(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)] \in$ QBF
$\exists x \forall y [(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})] \notin$ QBF

Tétel QBF **PSPACE** teljes.

Bizonyítás QBF $\in$ **PSPACE**

Adott $\langle\varphi\rangle$ bemeneten

Tár: $\mathcal{O}(n^2)$

1. Ha φ kvantormentes, akkor csak konstansokat tartalmaz, így értékeljük ki.
2. Ha $\varphi = \exists x \psi$ alakú, akkor hívjuk az eljárást $\langle\psi\rangle$-re először az $x = 0$ majd az $x = 1$ értékkel. Ha valamelyik hívás elfogadja bemenetét, akkor $\langle\psi\rangle \in$ QBF, különben $\langle\psi\rangle \notin$ QBF.
3. Ha $\varphi = \forall x \psi$ alakú, akkor hasonlóan, de abban az esetben fogadjuk el a bemenetet, ha mindkét hívás elfogad.

QBF PSPACE-teljes

QBF **PSPACE**-nehéz

Legyen $L \in$ **PSPACE**, mondjuk L eldönthető az M $\mathcal{O}(n^k)$ tárigényű determinisztikus Turing-géppel, ahol $k \geq 1$. Most feltehető, hogy a Turing-gép 1-szalagos, mert a tárkorlát szuperlineáris.

Adott w szóhoz szeretnénk olyan $|w| = n$-ben polinom méretű formulát készíteni, mely akkor és csak akkor van QBF-ben, ha $w \in L(M)$. Feltehető, hogy n hosszú szavakon M elfogadás esetén mindig ugyanabban a konfigurációban áll meg.

A konfigurációk leírásához Boole-változókat használunk, mint Cook tételének bizonyításában. Egy konfiguráció leírásához $\mathcal{O}(n^k)$ változó szükséges.

Mivel az elérhető konfigurációk hossza $\mathcal{O}(n^k)$, ezért az időigény $2^{\mathcal{O}(n^k)}$.

QBF PSPACE-teljes

$\varphi_{c_1,c_2,t}$ jelöljön olyan formulát, mely akkor és csakis akkor igaz, ha a c_1 konfigurációból elérhető t lépésen belül a c_2 konfiguráció.

$\varphi_{c_1,c_2,1}$ könnnyen felírható, hossza $\mathcal{O}(n^k)$.

Legyen $t > 1$.

$$\varphi_{c_1,c_2,t} = \exists c[\varphi_{c_1,c,\lceil \frac{t}{2} \rceil} \wedge \varphi_{c,c_2,\lceil \frac{t}{2} \rceil}]$$

Ez a módszer exponenciálisan hosszú formulákat eredményez!

$$\varphi_{c_1,c_2,t} = \exists c \forall d \forall d' \Big[((d = c_1 \wedge d' = c) \vee (d = c \wedge d' = c_2)) \longrightarrow \varphi_{d,d',\lceil \frac{t}{2} \rceil}\Big]$$

QBF PSPACE-teljes

Megjegyzés

- QBF akkor is **PSPACE**-teljes, ha a formula magja knf, a kvantorok alternálnak, és az első kvantor $\exists$ (esetleg az utolsó is $\exists$).
- Ekkor QBF felfogható kétszemélyes játékként.

  Adott $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots Q x_n \psi$

  - az 1. játékos választja az $x_1, x_3, \dots$ változók értékét és célja ψ igazzá tétele,
  - a 2. játékos választja felváltva az $x_2, x_4, \dots$ értékét, célja ψ hamissá tétele.

  $\psi \in$ QBF $\Leftrightarrow$ az 1. játékosnak nyerőstratégiája van.

FÖLDRAJZI JÁTÉK **PSPACE-teljes**

FÖLDRAJZI JÁTÉK:

Adott egy G irányított gráf egy p kezdőcsúcsból. Két játékos p-ből indulva felváltva egy olyan út csúcsait nevezi meg, mely nem halad át már meglátogatott csúcson. Az a játékos veszít, aki nem tudja folytatni. A probléma annak eldöntése, hogy az első játékosnak van-e nyerő stratégiája.

Tétel A FÖLDRAJZI JÁTÉK **PSPACE**-teljes.

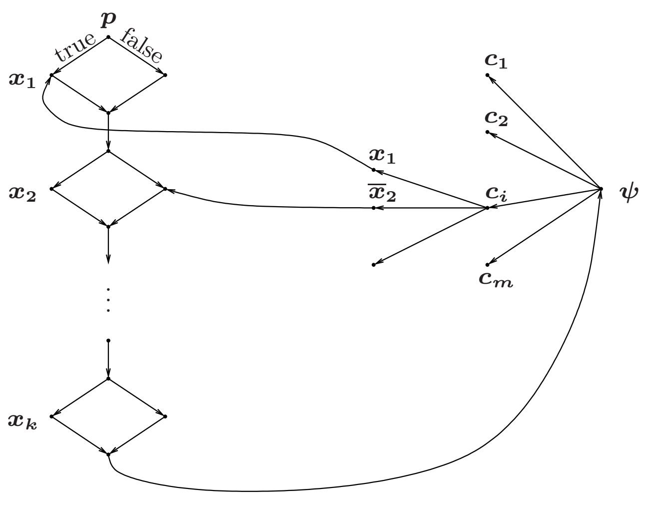
Bizonyítás Az, hogy **PSPACE**-ben van, a QBF-hez hasonlóan igazolható. Azt, hogy **PSPACE**-nehéz, a QBF-ből való visszavezetéssel igazoljuk.

Legyen adva a φ formula

$\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \exists x_k \psi$ k páratlan

$\psi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ knf.

FÖLDRAJZI JÁTÉK **PSPACE-teljes**



Az L és NL osztályok

Definíció $\mathbf{L} = \mathbf{SPACE}(\log n)$
$\mathbf{NL} = \mathbf{NSPACE}(\log n)$

Példa ELÉRHETŐSÉG $\in$ **NL**.

Világos, hogy

$$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{PSPACE}.$$

Az is ismert, hogy $\mathbf{NL} \subset \mathbf{PSPACE}$. Az a sejtés, hogy a fenti tartalmazások mindegyike valódi.

Logaritmikus tárral való visszavezetés

Definíció Legyen $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$, $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$. Azt mondjuk, hogy az $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ függvény az L_1 logaritmikus tárral való visszavezetése L_2-re, ha

$$\forall w \quad (w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2)$$

és f kiszámítható $\mathcal{O}(\log n)$ tárkorlátos determinisztikus Turing-géppel.

Definíció Azt mondjuk, hogy $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ logaritmikus tárral visszavezethető az $L_2 \in \Sigma_2^*$ nyelvre, ha létezik olyan $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ függvény mely az L_1-nek az L_2-re való logaritmikus tárral való visszavezetése. Jelölés: $L_1 \leq_l L_2$.

Állítás Ha $L_1 \leq_l L_2$ akkor $L_1 \leq_p L_2$.

Tétel A $\leq_l$ reláció előrendezés.

Logaritmikus tárral való visszavezetés

Tétel Az ELÉRHETŐSÉG **NL**-teljes a logaritmikus tárral való visszavezetésre.

Tétel **NL = coNL**.

Hierarchia